



## प्रारंभिक गणित

बातचीत के माध्यम से शिक्षण: चर और अचर



भारत में विद्यालय समर्थित  
शिक्षक शिक्षा

[www.TESS-India.edu.in](http://www.TESS-India.edu.in)



<http://creativecommons.org/licenses/>



एस.आर.मोहन्ती  
अपर मुख्य सचिव



अ.शा.पत्र क्र. R.S.K./10.....  
दूरभाष कार्यालय - 0755-4251330  
मध्यप्रदेश शासन  
स्कूल शिक्षा विभाग  
मंत्रालय, वल्लभ भवन, भोपाल-462 004  
भोपाल, दिनांक. 20-1-2016...

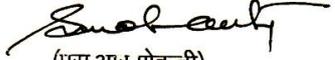
## संदेश

प्रिय शिक्षक साथियों,

बच्चों की शिक्षा को गुणवत्तापूर्ण और रोचक बनाने के लिए स्कूल शिक्षा विभाग निरन्तर प्रयासरत है। आप सभी के प्रयासों से शिक्षकों के शिक्षण कौशल में भी निखार आया है और शालाओं में कक्षा शिक्षण भी आनंददायी तथा बेहतर हुआ है।

इसी दिशा में शिक्षकों को बाल केन्द्रित शिक्षण की ओर उन्मुख करने और शिक्षक प्रशिक्षण की गुणवत्ता को बेहतर बनाने के उद्देश्यों को लेकर, TESS India द्वारा मुक्त शैक्षिक संसाधनों (Open Educational Resources) का विकास किया गया है। इनका उपयोग शिक्षण कार्य में सहजता व सुगमतापूर्वक किया जा सकता है। आशा है कि ये संसाधन, शिक्षकों एवं शिक्षक प्रशिक्षकों के व्यावसायिक उन्नयन और क्षमतावर्द्धन में लाभकारी और उपयोगी सिद्ध होंगे।

राज्य शिक्षा केन्द्र के संयुक्त तत्वाधान में TESS India द्वारा स्थानीय भाषा में तैयार किये गये मुक्त शैक्षिक संसाधनों (Open Educational Resources) को [www.educationportal.mp.gov.in](http://www.educationportal.mp.gov.in) पर भी उपलब्ध कराया गया है। आशा है इन संसाधनों के उपयोग से प्रदेश के शिक्षक और शिक्षक प्रशिक्षक लाभान्वित होंगे और कक्षाओं में पठन पाठन को रुचिकर और गुणवत्तायुक्त बनाने में मदद मिलेगी।  
शुभकामनाओं सहित,

  
(एस.आर.मोहन्ती)

**दीप्ति गौड मुकर्जी**

आयुक्त

राज्य शिक्षा केन्द्र एवं

सचिव

मध्यप्रदेश शासन

स्कूल शिक्षा विभाग



अर्द्ध शा. पत्र क्र. : 8

दिनांक : 12-1-16

पुस्तक भवन, वी-विंग

अरेरा हिल्स, भोपाल-462011

फोन : (का.) 2768392

फैक्स : (0755) 2552363

वेबसाइट : [www.educationportal.mp.gov.in](http://www.educationportal.mp.gov.in)

ई-मेल : [rskcommmp@nic.in](mailto:rskcommmp@nic.in)

## संदेश

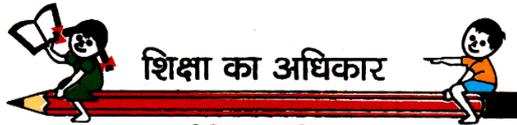
प्रिय शिक्षक साथियों,

सभी बच्चों को रुचिकर और बाल केन्द्रित शिक्षा उपलब्ध हो इसके लिए आवश्यक है कि हमारे शिक्षकों को शिक्षण की नवीनतम तकनीकों और शिक्षण विधियों से परिचित कराया जाए साथ ही इन तकनीकों के उपयोग के लिए उन्हें प्रोत्साहित भी किया जाए। TESS India द्वारा तैयार किये गये मुक्त शैक्षिक संसाधनों (Open Educational Resources) के उपयोग से शिक्षक शिक्षण प्रविधि के व्यावहारिक उपयोग को सीख सकते हैं। इनकी सहायता से शिक्षक न केवल विषय वस्तु को सुगमता पूर्वक पढ़ा सकते हैं बल्कि पठन पाठन की इस प्रक्रिया में बच्चों की अधिक से अधिक सहभागिता भी सुनिश्चित कर सकते हैं।

राज्य शिक्षा केन्द्र स्कूल शिक्षा विभाग ने स्थानीय भाषा में तैयार किये गये इन मुक्त शैक्षिक संसाधनों (Open Educational Resources) को अपने पोर्टल [www.educationportal.mp.gov.in](http://www.educationportal.mp.gov.in) पर भी उपलब्ध कराया है।

आशा है, कि आप इन संसाधनों का कक्षा शिक्षण के दौरान नियमित रूप से उपयोग करेंगे और अपने शिक्षण कौशल में वृद्धि करते हुए बच्चों की पढ़ाई को आनंददायक बनाने का प्रयास करेंगे।  
शुभकामनाओं सहित,

(दीप्ति गौड मुकर्जी)



**शिक्षा का अधिकार**

**सर्व शिक्षा अभियान  
सब पढ़ें सब बढ़ें**

**टेस-इण्डिया स्थानीयकृत ओईआर निर्माण में सहयोग**

<b>मार्गदर्शन एवं समीक्षा :</b>
श्रीमती स्वाति मीणा नायक, अपर मिशन संचालक, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
डॉ. एच. के. सेनापति, प्राचार्य, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
डॉ. ओ.पी.शर्मा, अपर संचालक, मध्यप्रदेश एससीईआरटी
डॉ. अशोक कुमार पारीक उपसंचालक, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
श्री आर. पी. त्रिपाठी, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
प्रो.जयदीप मंडल, विभागाध्यक्ष विज्ञान एवं गणित शिक्षा संकाय, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
डॉ. आर. रायजादा, सहप्राध्यापक एवं विभागाध्यक्ष विस्तार शिक्षा, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
डॉ. वी.जी. जाधव, से.नि. प्राध्यापक भौतिक, एनसीईआरटी
डॉ. के. बी. सुब्रमण्यम से.नि. प्राध्यापक गणित, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
डॉ. आई. पी. अग्रवाल से.नि. प्राध्यापक विज्ञान, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
डॉ. अश्विनी गर्ग सहा. प्राध्यापक गणित संकाय, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
डॉ. एल. के. तिवारी, सहप्राध्यापक विज्ञान, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
श्री एल.एस.चौहान, सहा. प्राध्यापक विज्ञान, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
डॉ. श्रुति त्रिपाठी, सहा. प्राध्यापक अंग्रेजी, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
डॉ. रजनी थपलियाल, व्याख्याता अंग्रेजी, ईएलटीआई, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
डॉ. मधु जैन, व्याख्याता शास. उच्च शिक्षा उत्कृष्टता संस्थान, भोपाल
डॉ. सुशोवन बनिक, सहा. प्राध्यापक क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
डॉ. सौरभ कुमार मिश्रा, सहा. प्राध्यापक क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
श्री अजी थॉमस, सहा. प्राध्यापक क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
डॉ. राजीव कुमार जैन, सहा. प्राध्यापक क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
<b>स्थानीयकरण :</b>
<b>भाषा एवं साक्षरता</b>
डॉ. लोकेश खरे, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
डॉ. एम.एल. उपाध्याय से.नि. व्याख्याता शास. उत्कृष्ट उ.मा.विद्यालय मुरैना
श्री रामगोपाल रायकवार, कनि. व्याख्याता, डाइट कुण्डेश्वर, टीकमगढ़
डॉ. दीपक जैन अध्यापक, शास. उत्कृष्ट उ.मा.विद्यालय क 1 टीकमगढ़
<b>अंग्रेजी</b>
श्री राजेन्द्र कुमार पाण्डेय, प्राचार्य, ईएलटीआई, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
श्रीमती कमलेश शर्मा, डायरेक्टर, ईएलटीआई, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
श्री हेमंत शर्मा, प्राचार्य, ईएलटीआई, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
श्री मनोज कुमार गुहा वरि. व्याख्याता, एससीईआरटी. मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
डॉ. एफ.एस.खान, वरि.व्याख्याता, प्रगत शैक्षिक अध्ययन संस्थान (आईएएसई) भोपाल
श्री सुदीप दास, प्राचार्य, शास.उ.मा.विद्यालय दालौदा, मन्दसौर
श्रीमती संगीता सक्सेना, व्याख्याता, शास.कस्तूरबा कन्या उ.मा.विद्यालय भोपाल
<b>गणित</b>
श्री बी.बी. पी. गुप्ता, समन्वयक गणित, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
श्री ए. एच. खान प्राचार्य शास.उ.मा.विद्यालय रामाकोना, छिंदवाड़ा
डॉ. राजेन्द्र प्रसाद गुप्त, प्राचार्य शास. जीवाजी ऑब्जर्वेटरी उज्जैन
डॉ.आर.सी. उपाध्याय, वरि. व्याख्याता, डाइट, सतना
डॉ. सीमा जैन, व्याख्याता, शास. कन्या उ.मा.विद्यालय गोविन्दपुरा, भोपाल
श्री सुशील कुमार शर्मा, शिक्षक, शास. लक्ष्मी मंडी उ.मा.विद्यालय, अशोका गार्डन, भोपाल
<b>विज्ञान</b>
डॉ. अशोक कुमार पारीक उपसंचालक, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र भोपाल
डॉ. सुसम्मा जॉनसन, व्याख्याता एस.आई.एस.ई. जबलपुर मध्यप्रदेश
डॉ.सुबोध सक्सेना, समन्वयक एससीईआरटी मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र भोपाल
श्री आर. पी. त्रिपाठी, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
श्री अरुण भार्गव, वरि. व्याख्याता, एससीईआरटी, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र भोपाल
श्रीमती सुषमा भट्ट, वरि.व्याख्याता, एससीईआरटी, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
श्री ब्रजेश सक्सेना, प्राचार्य, एससीईआरटी, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
डॉ. रेहाना सिद्दकी से.नि. व्याख्याता सेन्ट फ्रांसिस हा. से. स्कूल भोपाल

**TESS-India** (विद्यालय समर्थित शिक्षक शिक्षा) का उद्देश्य मुक्त शैक्षिक संसाधनों की सहायता से भारत में प्रारंभिक और सेकेण्डरी शिक्षकों के कक्षा शिक्षण व कक्षा निष्पादन को सुधारना है जिसमें वे इन संसाधनों की सहायता से बालकेंद्रित, सहभागी दृष्टिकोणों का विकास कर सकें। टेस इंडिया के मुक्त शैक्षिक संसाधन, शिक्षकों के लिए स्कूल पाठ्य पुस्तक के अतिरिक्त, सहयोगी पुस्तिका या संसाधन की तरह हैं। इसमें शिक्षकों के लिए कुछ गतिविधियां दी गई हैं जिन्हें वे कक्षाओं में बच्चों के साथ प्रयोग में ला सकते हैं, इसके साथ-साथ कुछ केस स्टडी भी दी गई हैं जो यह बताती हैं कि कैसे अन्य शिक्षकों ने विषयवस्तु को कक्षाओं में पढ़ाया। अपनी विषय संबंधी जानकारी को बढ़ाने तथा पाठ योजनाओं को तैयार करने में संसाधनों का उपयोग किया।

TESS-India OER भारतीय पाठ्यक्रम और संदर्भों के अनुकूल भारतीय तथा अंतर्राष्ट्रीय लेखकों के सहयोग से तैयार किये गये है और ये ऑनलाइन तथा प्रिंट रूप में उपयोग के लिए उपलब्ध हैं (<http://www.tess-india.edu.in>) OER कार्यक्रम से जुड़े प्रत्येक भारतीय राज्य के शिक्षकों के उपयोग के लिए उपयुक्त तथा कई संस्करणों में उपलब्ध हैं तथा शिक्षक व उपयोगकर्ता इन्हें अपनी स्थानीय आवश्यकताओं और संदर्भों के अनुरूप इनका स्थानीय करण करके उपयोग कर सकते हैं।

प्रस्तुत संस्करण मध्यप्रदेश की स्थानीय आवश्यकताओं और संदर्भों को ध्यान में रखकर तैयार किया गया है।

### वीडियो संसाधन

इस इकाई में कुछ गतिविधियों के साथ यह आइकॉन (संकेत) दिया गया है:  . इसका अर्थ है कि आप उक्त विशिष्ट विषय वस्तु या शैक्षणिक प्रविधि को और अधिक समझने के लिए TESS-India के वीडियो संसाधनों की मदद ले सकते हैं।

TESS-India वीडियो संसाधन (Resources) भारतीय परिप्रेक्ष्य में कक्षाओं में उपयोग की जा सकने वाली सीखने-सिखाने की विविध तकनीकों को दर्शाते हैं। हमें यकीन है कि इनसे आपको इसी प्रकार की तकनीकें अपनी कक्षा में करने में मदद मिलेगी। यदि इन वीडियो संसाधनों तक आपकी पहुँच नहीं हो तो कोई बात नहीं। यह वीडियो पाठ्यपुस्तक का स्थान नहीं लेते, बल्कि उसको पढ़ाने में आपकी मदद करते हैं।

TESS-India के वीडियो संसाधनों को TESS-India की वेबसाइट <http://www.tess-india.edu.in/> पर ऑनलाइन देखा जा सकता है या डाउनलोड किया जा सकता है। इसके अतिरिक्त आप इन वीडियो को सीडी या मेमोरी कार्ड में लेकर भी देख सकते हैं।

### संस्करण 2.0 EM12v2

#### Madhya Pradesh

तृतीय पक्षों की सामग्रियों और अन्यथा कथित को छोड़कर, यह सामग्री क्रिएटिव कॉमन्स एट्रिब्यूशन-शेयरएलाइक लाइसेंस के अंतर्गत उपलब्ध कराई गई है: <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>  
TESS-India is led by The Open University UK and funded by UK aid from the UK government

यह इकाई किस बारे में है?

चर और अचर गणितीय मॉडलिंग और सूत्रों में उपयोग की जाने वाली बुनियादी अवधारणाएँ हैं। चर और अचर की भूमिका समझने से विद्यार्थी बीजगणितीय परिचालन में दक्ष हो जाते हैं, जो कि गणितीय तर्क वितर्क में और गणित की परीक्षाओं में बेहतर करने के लिए महत्वपूर्ण है।

इस इकाई में आप गणित के पाठ्यक्रम में चर और अचर की भूमिकाओं के बारे में सोचेंगे और जानेंगे कि कैसे यह समझने से विद्यार्थियों को गणितीय कथनों और बीजगणितीय अभिव्यक्तियों को अर्थ देने में मदद होती है।

गतिविधियों के माध्यम से आप यह भी सीखेंगे कि कैसे गणित के बारे में बात करने से आपके विद्यार्थियों को अधिक प्रभावशाली रूप से सीखने में मदद मिलती है।

इस इकाई से आप क्या सीख सकते हैं?

- चर और अचर राशियों के बीच अंतरों और उनकी भूमिकाओं को समझने में आपके विद्यार्थियों की कैसे मदद करें।
- गणितीय कथन लिखने और बीजगणितीय अभिव्यक्तियों को बनाने में आपके विद्यार्थियों की मदद करने के तरीके।
- बातों के द्वारा सीखने के लिए और गणितीय शब्दकोश और शब्दावली के उपयोग से खुद को अभिव्यक्त करने के लिए आपके विद्यार्थियों को प्रोत्साहित करने हेतु कुछ उपाय।
- इस इकाई का संबंध NCF (2005) और NCFTE (2009) की दर्शाई गई शिक्षण आवश्यकताओं से है। संसाधन 1।

## 1 स्कूल गणित में चर और अचर

बीजगणितीय तर्कशक्ति और समझ विकसित करने के लिए चर और अचर की भूमिका समझना आवश्यक है। बीजगणितीय अभिव्यक्ति परिचालित करने के लिए यह आवश्यक है और यह छात्रों को 'अलग अलग तरीकों से गणितीय संबंधों को अभिव्यक्त करने और उनके बारे में अधिक जानने' में सक्षम बनाती है (वॉटसन और अन्य, 2013, पृ. 15)।

तकनीकी रूप से, 'आश्रित' चर, 'स्वतंत्र' चर और अचर होते हैं। अज्ञात  $x$  पारंपरिक रूप से स्वतंत्र चर दर्शाने के लिए उपयोग किया जाता है और ग्राफ़ बनाते समय पारंपरिक रूप से क्षैतिज अक्ष पर ही दर्शाया जाता है।

उदाहरण के लिए इस व्यंजक में:

$$y = x + 4$$

जहाँ  $x$  और  $y$  पूर्णांक हैं:

- $x$  स्वतंत्र चर है और उस समुच्चय के किसी भी मान के लिए मौजूद हो सकता है जिसके लिए व्यंजक परिभाषित किया गया है। इस उदाहरण में इसका अर्थ है कि वह कोई भी पूर्णांक हो सकता है।
- $y$  को आश्रित चर के रूप में वर्णित किया जाता है। वह आश्रित होता है क्योंकि उसका मान  $x$  के मान पर निर्भर करता है। वह एक चर है क्योंकि  $x$  की तरह, वह उस समुच्चय के किसी भी मान के लिए मौजूद हो सकता है जिसके लिए व्यंजक परिभाषित किया गया है। इस उदाहरण में इसका अर्थ है कि वह कोई भी पूर्णांक हो सकता है।
- 4 अचर राशि है, अर्थात्, एक स्थिर राशि है, स्वतंत्र या आश्रित चरों के मान चाहे जो भी हो। यह उन पर निर्भर नहीं है।

शोध बताते हैं कि चर और अचर के बारे में जानने में और सामान्य रूप से बीजगणित सीखने में विद्यार्थियों के सामने आने वाला एक मुख्य मुद्दा है, बीजगणितीय व्यंजकों में राशियों और चरों के बीच के संबंध को न समझना। इस इकाई का लक्ष्य विद्यार्थियों को संख्याओं और बीजगणितीय व्यंजकों के बीच संपर्कों के बारे में सोचने और बातें करने के लिए प्रेरित करके चर और अचर को अर्थ देकर इस समझ को विकसित करना है।

## 2 बातों के द्वारा चरों और अचरों के बारे में सीखना

विद्यार्थियों के लिए किसी भी गणितीय धारणा की समझ विकसित करने और उसे अर्थ देने का एक कार्यकुशल उपाय है उसके बारे में बातें करना:

बच्चों को यह सीखना ज़रूरी है कि... उनके खुद के गणितीय अर्थ बनाने, नियंत्रित करने और व्यक्त करने साथ ही दूसरों की गणितीय भाषा की व्याख्या करने के लिए गणितीय भाषा का उपयोग कैसे करें।

(पिम, 1995, पृ. 179)

वे विद्यार्थी जो 'गणित की भाषा' बोलना नहीं सीखते वे कई बातों में पीछे रह जाते हैं; खास तौर पर, जैसा ऊपर पिम कहते हैं कि उनके पास अपने खुद के गणितीय विचारों को बनाने, नियंत्रित करने और अभिव्यक्त करने के लिए संसाधन उपलब्ध नहीं होते।

विद्यार्थियों को गणित के बारे में बात करने के लिए प्रोत्साहित करना और ऐसा करने के लिए उचित शब्दकोश और शब्दावली विकसित करने में उनकी मदद करना सीखने का एक महत्वपूर्ण हिस्सा है। सोचना और संवाद करना इतने घनिष्ठ रूप से आपस में जुड़े हुए हैं (सफ़ार्ड, 2010) कि यह जानना संभव नहीं है कि कोई कहाँ रुकता है और दूसरा कहाँ से शुरू करता है। यदि आप चाहते हैं कि आपके विद्यार्थी गणित के बारे में सोचें, उसे समझें और इस प्रकार प्रभावशाली ढंग से गणित सीखें, तो उन्हें अपने गणितीय विचारों को व्यक्त करना भी सीखना होगा।

विद्यार्थी इस बारे में बात भी कर पाएँगे कि वो एक दूसरे के बारे में क्या सोच रहे हैं। दूसरे के साथ संवाद करने के लिए विचारों को विकसित करने की गतिविधि गलतफहमियों को सुधारने में उन्हें सक्षम कर सकता है। यह देखा गया है कि जो विचार किसी ऐसी चीज़ में बनाए जाएँ जिसे संचारित किया जा सके, उन्हें विद्यार्थियों द्वारा याद रखे जाने की अधिक संभावना होती है (ली 2006); दूसरे शब्दों में इसका अर्थ है कि छात्रों में उन विचारों को समझने की अधिक संभावना होती है।

पहली गतिविधि में विद्यार्थियों से उनके वास्तविक जीवन के अनुभवों में राशियों को पहचानने के बारे में विचार करने को कहा जाता है। इसमें उनकी कल्पनाशक्ति को सक्रिय करने के लिए एक चित्र का उपयोग किया जाता है। इस गतिविधि में अत्यावश्यकता, प्रतिस्पर्धात्मकता और उत्तेजना का बोध कराने हेतु उपाय बताने के लिए विद्यार्थियों को एक लघु समय सीमा देने का सुझाव दिया जाता है। इसका यह भी अर्थ होता है कि उनके पास बीजगणित करने को लेकर चिंतित होने के लिए कम समय बचेगा।

इस अंक में अपने विद्यार्थियों के साथ गतिविधियों के उपयोग का प्रयास करने से पहले अच्छा होगा कि आप सभी गतिविधियों को पूरी तरह या आंशिक रूप से स्वयं करके देखें। यह और भी बेहतर होगा अगर आप अपने किसी सहकर्मी के साथ मिलकर इसे करने का प्रयास करें क्योंकि स्वयं के अनुभव के आधार पर सिखाना आसान होगा। स्वयं प्रयास करने से आपको किसी शिक्षा ग्रहण करने वाले व्यक्ति के अनुभव का ज्ञान होगा, जो आपके शिक्षण और एक शिक्षक के रूप में आपके अनुभवों को प्रभावित करेगा। जब आप तैयार हों, तो एक बार फिर अपने विद्यार्थियों के साथ गतिविधियों का उपयोग करें और विचार करके इस बारे में नोट बनाएँ कि गतिविधि कैसी हुई और उसके ज़रिए क्या सीखा गया। इससे आपको अधिक विद्यार्थी-केंद्रित शैक्षिक वातावरण बनाने में मदद मिलेगी।

गतिविधि 1: चित्र हजार शब्दों के बराबर होते हैं

तैयारी

इस गतिविधि को जोड़ियों और छोटे-छोटे समूहों में करना सबसे अच्छा रहता है। सुनिश्चित करें कि समूह में विद्यार्थी बैठे हों ताकि वे एक दूसरे को अच्छे से सुन सकें। यदि किसी भी समय आपको लगता है कि विद्यार्थियों को और अधिक समय की ज़रूरत है, तो उन्हें कुछ बोनस या अतिरिक्त समय दे दें। हो सकता है कि आप प्रमुख संसाधन 'जोड़ी में कार्य का उपयोग' को देखना चाहें।

गतिविधि

अपने विद्यार्थियों से निम्नलिखित पूछें:

- आपमें से कितने लोगों ने ऑटोरिक्शा में सफ़र किया है? चित्र 1 में श्री राजू को एक ऑटोरिक्शा में जाते दिखाया गया है। अपने समूहों में, ऐसी यथासंभव अधिक (मापनीय) राशियों के बारे में सोचें जो एक ऑटोरिक्शा सफ़र के साथ जुड़ी हों। जो समूह चार मिनट में ऐसी सबसे अधिक राशियों को लिखे वह विजेता होगा। आपका समय शुरू होता है ... अब।



चित्र 1 ऑटोरिक्शा चालक और यात्री। (स्रोत: मोहम्मद माहदी करीम)

- समय सीमा के अंत में, उन्हें अपनी पेंसिलें नीचे रखने को कहें।  
फिर उन्हें अपने विचारों को सारी कक्षा के साथ बांटने को कहें। यह निम्नलिखित रूप से व्यवस्थित किया जा सकता है:
- उन्हें उनके द्वारा लिखी गई चीजों की संख्या गिनने के लिए दस सेकंड दें।
- अब वह समूह चुनें जिसने न्यूनतम बातें और वह समूह चुनें जिसने अधिकतम राशियाँ लिखीं।
- सबसे कम राशियाँ लिखने वाले समूह के दो विद्यार्थियों और सबसे अधिक राशियाँ लिखने वाले समूह के दो विद्यार्थियों को सामने आकर उनके द्वारा सोची गई राशियों को एक साथ ब्लैकबोर्ड पर लिखें – इससे समय की बचत होगी। विद्यार्थियों को ब्लैकबोर्ड के पास रहने को कहें।
- कक्षा के प्रत्येक समूह से उनके द्वारा बताई गई कोई भी राशियों को बांटने के लिए कहें जो पहले से ब्लैकबोर्ड पर मौजूद राशियों से अलग हैं। ब्लैकबोर्ड के पास खड़े विद्यार्थियों में से एक से सारे नए सुझावों को लिखने को कहें। ब्लैकबोर्ड पर इतने सारे लिखने वालों के होने का अर्थ यह हुआ कि यह तुरंत किया जा सकता है।
- जल्द ही आपके ब्लैकबोर्ड पर एक ऑटोरिवक्शा सफ़र से जुड़ी कई राशियाँ लिखी होंगी। इनमें से कुछ निम्नलिखित शामिल हो सकती हैं:
  - मुसाफ़िरों की संख्या
  - यात्रा का कुल किराया
  - यात्रा में लगा समय
  - सफ़र के दौरान ट्रैफ़िक सिग्नलों पर लाल बत्तियाँ
  - यात्रा की दूरी
  - ऑटोरिवक्शा में पहियों की संख्या
  - ऑटोरिवक्शा के प्रत्येक पहिये पर बोल्टों की संख्या
  - ऑटोरिवक्शा का पंजीकरण संख्या
  - ऑटोरिवक्शा की रफ़्तार
  - ऑटोरिवक्शा की कीमत
  - ऑटोरिवक्शा का माइलेज।

यदि हो सके तो इस सूची को ब्लैकबोर्ड पर लिखा रहने दें और अपने छात्रों को उसे लिखने को कहें। उन्हें गतिविधि 2 के लिए इसकी ज़रूरत पड़ेगी।

वीडियो: समूह में कार्य का उपयोग करना



केस स्टडी 1: गतिविधि 1 का उपयोग करके श्रीमती भाटिया यह प्रदर्शित करती हैं

*यह उस शिक्षिका की कहानी है जिन्होंने अपने प्रारंभिक विद्यार्थियों के साथ गतिविधि 1 का प्रयास किया।*

मैं खुद कभी-कभी चर और अचर और उनका एक दूसरे के साथ क्या संबंध है, इस बारे में दुविधा में पड़ जाती हूँ, इसलिए एक ओर तो मुझे लगा कि कक्षा में इन गतिविधियों को करना मेरे खुद के विषय ज्ञान विकास के लिए अच्छा होगा, दूसरी ओर इससे मुझे थोड़ा डर भी लगा। क्या होगा यदि मैं कक्षा में, अपने विद्यार्थियों के सामने इस तरह दुविधा में पड़ जाऊँ?

इसलिए मैंने गतिविधि 1, 2 और 3 पहले अकेले ही की और फिर लंच ब्रेक के दौरान एक सहकर्मी के साथ करके देखी। मेरे खुद के करने और अपने साथी शिक्षक के साथ करने के बीच अंतर यह था कि जब हमारी समझ में कोई चीज़ नहीं आती तो हम एक दूसरे के साथ बात करते थे और एक दूसरे की मदद करते थे। और साथ ही, मिल कर हमने कई बड़े मजेदार उदाहरण ढूँढ निकाले जिसका मतलब हम बीजगणित करते समय खूब हँसे! पहली बार करके देखने पर मैंने कक्षा में इन गतिविधियों को करके देखने के लिए खुद को पूरी तरह तैयार महसूस किया।

गतिविधि 1 से परिचय करवाने के लिए मैंने विद्यार्थियों को श्री राजू का चित्र दिखाया और मैंने ऑटोरिवक्शा में उनके खुद के सफ़र के बारे में कक्षा को कुछ बताने के लिए कहा। इससे असल में कुछ अतिरिक्त चरों के बारे में सोचने में मदद मिली, जैसे कि: आंटी अंजू का घर कितना दूर

था, पार्क कितनी दूर था, इन यात्राओं में यात्रियों की अलग अलग संख्या, उसमें लगा समय और क्या सड़कें साफ थीं या उन पर मानसून में हुई बारिश के कारण कुछ पानी भरा हुआ था, इनमें क्या बदलाव आए। तब जाकर मैंने उन्हें गतिविधि करने को कहा।

मैंने उन्हें चार-चार के समूहों में कार्य करने को कहा। उन्हें ये बताते ही, कि उनके पास केवल चार मिनट हैं, वे तुरंत शुरू हो गए और माहौल एकदम स्पर्धात्मकता और उत्सुकता से भर गया। हालाँकि मुझे यह भी महसूस हुआ कि उन्हें केवल चार मिनट देकर मैंने उनमें से कुछ शर्मिले विद्यार्थियों को एक तरह से ज्यादा योगदान न देने का बहाना दे दिया था। शायद अगली बार मैं उन्हें कुछ लंबा समय दूँ और अतिरिक्त निर्देश दूँ ताकि यह सुनिश्चित हो सके कि समूह का हर विद्यार्थी कम से कम दो विचारों का तो योगदान दे।

कक्षा को फीडबैक देने के लिए मैंने गतिविधि में सुझाया गया तरीका अपनाया। इसका बड़ा फायदा यह था कि सारी कक्षा के योगदान का मूल्यांकन करते-करते ही हमारे पास रिकॉर्ड समय में ब्लैकबोर्ड पर उदाहरणों का अंबार लग गया। मैंने सोचा कि वो एक अच्छा विचार था — मेरे कक्षा में करीब 90 विद्यार्थी हैं और मैं अक्सर 'समूची कक्षा के साथ साझा करने' से बचती हूँ क्योंकि उसमें बहुत समय लगता है।

आपके शिक्षण अभ्यास के बारे में सोचना

अपनी कक्षा के साथ ऐसा कोई अभ्यास करने पर बाद यह सोचें कि क्या ठीक रहा और कहाँ गड़बड़ी हुई। ऐसे प्रश्न सोचें जिनसे विद्यार्थियों में रुचि पैदा हो तथा उनके बारे में उन्हें समझाएँ ताकि वे उन्हें हल करके आगे बढ़ सकें। ऐसे चिंतन से वह 'स्क्रिप्ट' मिल जाती है, जिसकी मदद से आप विद्यार्थियों के मन में गणित के प्रति रुचि जगा सकते हैं और उसे मनोरंजक बना सकते हैं। अगर विद्यार्थियों को समझ नहीं आ रहा है और वे कुछ नहीं कर पा रहे हैं, तो इसका मतलब है कि उनकी इसमें सम्मिलित होने की रुचि नहीं है। हर बार गतिविधियाँ करते समय इस विचारात्मक अभ्यास का उपयोग करें, यह ध्यान रखते हुए कि श्रीमती भाटिया ने कुछ मामूली परिवर्तन किए थे जिससे काफी फर्क पड़ा था।



विचार कीजिए

निम्नलिखित चिंतन को बढ़ावा देने वाले अच्छे प्रश्न हैं:

- आपकी कक्षा में इसका प्रदर्शन कैसा रहा?
- विद्यार्थियों से कैसी प्रतिक्रियाएँ अनपेक्षित थीं? क्यों?
- क्या किसी भी समय आपको ऐसा लगा कि हस्तक्षेप करना चाहिए?
- क्या आपने कार्य में किसी भी तरीके का संशोधन किया? अगर हाँ, तो इसके पीछे आपका क्या कारण था?

### 3 चर और अचर को पहचानना

पिछली गतिविधि में विद्यार्थी वास्तविक जीवन के अपने अनुभवों का उपयोग करके उन्हें राशियों की गणितीय अवधारणा से जोड़ते थे। दूसरी गतिविधि में विद्यार्थियों को उनके द्वारा गतिविधि 1 में पहचानी गई राशियों के आधार पर चरों और अचरों में अंतर करने के लिए कहा जाता है।

इन अवधारणाओं के बीच अंतर की विद्यार्थियों की समझ को विकसित करने में उन्हें मदद करने के लिए यह महत्वपूर्ण है कि वे इसके बारे में बात करें। विद्यार्थियों से यह अपेक्षा करना महत्वपूर्ण है कि वे गणितीय शब्दों का स्वयं उपयोग करें और जहाँ उन्हें ऐसा करना हो वहाँ उस तरह का माहौल पैदा करें। इससे आपके विद्यार्थी बीजगणितीय व्यंजकों, चरों और अचरों की पहचान, उपयोग और उनके बारे में एक दूसरे से संवाद करने में सक्षम होंगे। 'एक गणितज्ञ के समान बोलना' और गणित को बस *याद करने* की बजाय उसे *समझना* एक महत्वपूर्ण कदम है। विद्यार्थियों से पूछना कि 'क्या समान रहेगा?' या 'क्या बदलेगा?' अगली गतिविधि में चर्चा आरंभ करने तथा चर और अचर की पहचान में मदद कर सकता है।

#### गतिविधि 2: क्या समान रहेगा, क्या बदलेगा?

इस गतिविधि को छोटे-छोटे समूहों या जोड़ियों में करना सबसे अच्छा रहता है। यह महत्वपूर्ण है कि सभी विद्यार्थियों के पास यह कहने का मौका हो कि वो क्या सोच रहे हैं और उन्हें उनकी गणितीय शब्दावली का अभ्यास करने का मौका मिले।

- विद्यार्थियों से गतिविधि 1 की उन राशियों की सूची देखने को कहें जो उन्होंने अपनी पुस्तक में लिखी थी और ब्लैकबोर्ड में सूचीबद्ध की थी। फिर उनके समूह या जोड़ी में, उनसे पहचानने, चर्चा करने और एक नोट बनाने के लिए कहें।
- जिन राशियों के मान बदल जाएँगे, उन्हें 'चर' कहा जाता है
- जिन राशियों के मान नहीं बदलते, जो समान रहेंगी, उन्हें 'अचर' कहा जाता है।
- एक संपूर्ण कक्षा के रूप में, विद्यार्थियों के साथ राशियों को चर या अचर के रूप में श्रेणीबद्ध करने के लिए उनकी शोध और कारणों पर चर्चा करें।

- अब अपने विद्यार्थियों से छोटे-छोटे समूहों में कार्य करने को कहें, चरों में से तीन को चुनें और चर्चा करें कि चर कैसे बदलेंगे। उन्हें अपने खुद के तरीके से रिकॉर्ड करने को कहें, लेकिन उन्हें चर, अचर, बदलाव और समान रहना जैसे शब्दों और वाक्यांशों का उपयोग करना चाहिए।
- दो या तीन चर राशियों को चुनें जिन पर पिछले चरण में सबसे ज़्यादा देखा गया था और विद्यार्थियों से आगे आकर यह लिखने को कहें कि उन्होंने यह कैसे दर्ज किया था कि चर में बदलाव किससे आया। इन रिकॉर्ड पर कक्षा में चर्चा करें और जानें कि विद्यार्थी क्या सोचते हैं कि उनके रिकॉर्ड और स्पष्ट कैसे बनाए जा सकते हैं।

केस स्टडी 2: श्रीमती जाहिदा गतिविधि 2 के बारे में बताती हैं

गतिविधि के पहले भाग में मैंने विद्यार्थियों से कहा कि दो या तीन की जोड़ी में काम करें ताकि वे एक दूसरे का लिखा हुआ देख सकें।

मैंने उन्हें प्रश्न बताया और उन राशियों के इर्द गिर्द एक बॉक्स बनाने को कहा जो बदल जाएगी। जब वे यह कर रहे थे, तो मैं कक्षा में बिना किसी हस्तक्षेप के घूम रही थी। मैंने कई चर्चाएँ सुनी कि कोई राशि हमेशा बदलेगी या हमेशा वही रहेगी, चाहे जो हो जाए। शुरुआत में एक दूसरे को यकीन दिलाने की कोशिश करते हुए उनके वर्णन सदा ही धाराप्रवाह नहीं होते थे, लेकिन मुझे तो लगता है कि जैसे-जैसे वे प्रयास करते गए वे इसमें बेहतर होते गए। जब तक वर्गीकरण के बारे में हमने पूर्ण कक्षा की चर्चा की तब तक अधिकांश विद्यार्थी खुद को काफी स्पष्ट रूप से व्यक्त करने में सक्षम हो गए थे। जिनकी आवाज़ कुछ दबी सी थी, उन्हें मैंने फिर एक बार वर्णन का अभ्यास करने के लिए भेज दिया और ज़्यादातर को उससे मदद मिली।

हमारी सूची अब भी ब्लैकबोर्ड पर थी और पहले मैंने चरों पर बॉक्स भी बनाए (विद्यार्थियों के अनुरोध पर), लेकिन उससे सब अस्तव्यस्त दिखता था। तो मैंने सूची को नए सिरे से दो स्तंभों में लिखा — एक का लेबल था ‘चर — वे राशियाँ जिनके मान बदलेंगे’ और दूसरे का लेबल था ‘अचर — वे राशियाँ जिनके मान समान रहेंगे’। मैंने सोचा पहले गणितीय शब्दों को लिखने से उन्हें वे शब्द सीखने में मदद मिलेगी।

गतिविधि के तीसरे भाग में उन्होंने चार से छः विद्यार्थियों के समूहों में कार्य किया। मैंने उन्हें उनके रिकॉर्ड लिखने के लिए कागज़ की एक बड़ी शीट दी और उनसे कहा कि हम इस अभ्यास के खत्म होने पर उन्हें दीवार पर लगाएँगे (जो हमने किया)। मुझे लगता है कि ऐसा करने से वे अधिक शुद्धता के साथ सोच पाए कि वे किसके बारे में लिख रहे हैं। जब वे चरण 3 पर काम कर रहे थे तो मैं कक्षा में घूम रही थी और मैंने तय किया कि गतिविधि के अंतिम भाग में हम दो चरों के बारे में विस्तार के साथ जानेंगे — पहला था पहियों की संख्या और दूसरा थोड़ा जटिल था एक समूह में अलग-अलग जगहों पर यात्रा करने के दौरान एक यात्री द्वारा अपने हिस्से के तौर पर अदा की जाने वाली राशि (या कीमत)।

विद्यार्थियों को आकर इसके अपने रिकॉर्ड को ब्लैकबोर्ड पर लिखने करने को कहने से हमें मिले आरेख, पूर्ण वाक्य, बीजगणितीय व्यंजक और इन सबका एक मिश्रण और ये सब ब्लैकबोर्ड पर मौजूद थे। मुझे उसके बारे में ये अच्छा लगा कि इसमें कैसे ये आपसी सम्बन्ध और अलग अलग प्रस्तुतियाँ दिखाई गईं और हम इन प्रस्तुतियों में समानताओं और अंतरों पर चर्चा कर पाए।



विचार कीजिए

श्रीमती जाहिदा के पाठ में विद्यार्थियों और साथ ही शिक्षक के द्वारा भी ब्लैकबोर्ड पर बहुत कुछ लिखना और रिकॉर्ड करना शामिल था। आपके अनुसार इस तरीके के लाभ और संभावित हानियाँ क्या हैं?

अब सोचें कि आपके विद्यार्थियों के साथ गतिविधि कैसी हुई और निम्नलिखित प्रश्नों पर विचार करें:

- छात्रों से कैसी प्रतिक्रियाएँ अनपेक्षित थीं? क्यों?
- अपने विद्यार्थियों की समझ का पता लगाने के लिए आपने क्या सवाल किए?
- क्या आपने टास्क में ज़रा भी संशोधन किया, जिस प्रकार श्रीमती जाहिदा ने किया था? अगर हाँ, तो इसके पीछे आपका क्या कारण था?

#### 4 औपचारिक बीजगणितीय कथन और व्यंजक लिखना

पेशेवर गणितज्ञ जो हो रहा है उसकी गतिकी और उसमें परिवर्तनों का पूर्वानुमान करने और उनका वर्णन करने के लिए मॉडल विकसित करते हैं। ऐसा करके वे यह अंदाज़ा लगाना संभव कर देते हैं कि परिवर्तन होने पर क्या ज़रूरी हो सकता है, जो कि नियोजन में बहुत महत्वपूर्ण है। यह गणितीय मॉडलिंग यह तय करने पर निर्भर होती है कि चर और अचर क्या हैं, कौन-कौन से जुड़े हैं और वे कैसे जुड़े हैं। गतिविधि 1 और 2 में इस

पर विचार किया गया है। अगला चरण यह तय करने से संबंधित है कि ये चर और अचर कैसे एक दूसरे को प्रभावित करते हैं और कैसे एक दूसरे से जुड़े हैं और गणितीय रूप से व्यक्त किए गए कथन बना कर इस 'मॉडल' को एक गणितीय रूप में रिकॉर्ड करना।

अगली गतिविधि इस बारे में आपकी सोच को विकसित करेगी कि ऐसे गणितीय मॉडल के सरल संस्करण कैसे बनाएँ और गतिविधि 1 और 2 की सीखों पर कैसे आगे बढ़ें। ये कार्य जोड़ियों या छोटे समूहों में कार्य कर रहे विद्यार्थियों के लिए खासतौर पर अच्छा होता है क्योंकि इससे अधिक विचार सामने आते हैं और कहीं अटक जाने पर विद्यार्थी एक दूसरे की सहायता कर सकते हैं।

### गतिविधि 3: बीजगणितीय व्यंजकों में चर और अचर राशियाँ

[शिक्षक के लिए नोट: यह कार्य पूर्णांक संख्याओं का उपयोग करके ही सरलीकृत किया जा सकता है।]

भाग 1: श्री राजू अपना ऑटोरिक्षा किराया गिनते हैं

- विद्यार्थियों को श्री राजू द्वारा एक ऑटोरिक्षा में की गई शहर की यात्रा की याद दिलाएँ। यह सुनिश्चित करने के लिए कि उनसे अधिक किराया न लिया जाए, श्री राजू कितना किराया हुआ है यह खुद गिनते हैं।
- ऑटोरिक्षा चालक 2 किलोमीटर तक की यात्रा के लिए रु. 25 किराया लेता है। उसके बाद रु. 8, अगले हर अतिरिक्त 1 किमी का किराया होता है।

विद्यार्थियों से निम्नलिखित करने के लिए कहें:

- श्री राजू द्वारा 3.6 किमी, 6.7 किमी, 12.3 किमी, 25.9 किमी, 31 किमी, और अंत में  $x$  किमी की यात्रा करने पर अदा किए गए किराए की गणना करें।
- प्रत्येक उत्तर के लिए आपने जिस तरह गणना की वह विधि लिखें। क्या आपको  $x$  किमी की कीमत जानने के लिए अपनी विधि बदलनी पड़ी? अपने सहपाठियों के साथ अपने उत्तर जाँचें।
- अब इस कथन को बीजगणित या शब्दों में पूरा करें:  
यदि श्री राजू  $x$  किमी की यात्रा करते हैं, तो उन्हें \_\_\_\_\_ किराया देना पड़ेगा।

ध्यान रहे कि उपरोक्त संपूर्ण वाक्य 'यदि श्री राजू ...' एक कथन कहलाता है। जिसे विद्यार्थियों को अंत में भरना है, इस मामले में कुछ इस तरह,

$25 + 8(x - 2)$ , जहाँ  $x > 2$ , इसे 'बीजगणितीय व्यंजक' कहते हैं। यदि विद्यार्थी अब भी बीजगणितीय नोटेशन में लिख नहीं पाते हैं तो उन्हें अपने शब्दों में वाक्य बना कर लिखना चाहिए।

भाग 2: अपने कथन खुद बनाएँ

विद्यार्थियों से कहें कि वे गतिविधि 2 में उनके द्वारा बनाई गई चर और अचर की सूची का उपयोग करके लागत या समय जैसी अवधारणाओं के लिए शब्दों या बीजगणितीय व्यंजकों के साथ अपने खुद के कथन बनाएँ।

आपके सारे विद्यार्थी चर और अचर का उपयोग करके अपने खुद के कथन बनाने की अपनी समझ में शायद एक ही स्तर पर न हों। यह गतिविधि आपको उनके प्रदर्शन की निगरानी करने और उन्हें रचनात्मक फीडबैक प्रदान करने का एक शानदार अवसर देती है। गतिविधि के इस पहलू के लिए आपको तैयार होने में मदद के लिए आप शायद एक प्रमुख संसाधन की 'निगरानी करना और फीडबैक देना' पर एक नज़र डालना चाहें।

वीडियो: मॉनीटरिंग एवं फीडबैक देना



केस स्टडी 3: गतिविधि 3 के उपयोग का अनुभव श्री जॉन बताते हैं

मैंने विद्यार्थियों से गतिविधि 3 के भाग 1 पर जोड़ी में या तीन के समूहों में कार्य करने को कहा क्योंकि मुझे लगा इससे उन्हें मदद मिल सकती है और यदि वे नहीं जानते कि कैसे करें तो उनकी समस्या हल की जा सकती है।

जब वे इस पर कार्य कर रहे थे, मैं घूमते हुए यह देख रहा था कि वे श्री राजू को कितना किराया देना होगा इसकी गणना कैसे कर रहे थे। मैंने देखा कि वे अलग अलग विधियों का उपयोग कर रहे थे। मैंने सोचा उन्हें सारी कक्षा के साथ साझा करना बेहतर होगा ताकि छात्र देख सकें कि एक प्रश्न को हल करने के कई तरीके हो सकते हैं। तो लगभग पाँच मिनटों के बाद मैंने कक्षा को रोका और ऐसे दो छात्रों को ब्लैकबोर्ड के पास बुलाया जिन्हें मैं जानती थी कि उन्होंने अलग-अलग तरीकों का उपयोग किया था और उनसे लिखने को कहा। फिर मैंने पूछा कि किसने उसे अलग तरीके से किया है और उन्हें बताने को कहा कि उन्होंने अपनी गणना कैसे की थी।

मैंने देखा कि सारे विद्यार्थी सुन नहीं रहे थे, तो मैंने सभी विद्यार्थियों से कहा कि वे अपने अपने समूह या जोड़ी में दूसरों के द्वारा उपयोग की गई विधि को समझें और फिर हमने एक बार फिर सारी कक्षा के साथ उसे बांटा। इसके परिणामस्वरूप वे गलतफहमियों को ढूँढ पाए और उन पर चर्चा कर पाए। उदाहरण के लिए सीमा और उसके साथी ने 0.8 किमी के गुणज निकाल कर प्रत्येक गुणज की कीमत निकाली थी। फिर उन्होंने प्रश्न में पूछे गए गुणज के सबसे करीब वाला उपयोग किया। लेकिन वह भूल गई थी कि पहले दो किलोमीटर का किराया निर्धारित था। जय के समूह ने उसकी विधि की जाँच की और उन्होंने बताया कि वे इस निर्धारित किराए को गिनना भूल गए थे। तो फिर हुआ ये कि न केवल वे किसी हल तक पहुँचने के अलग अलग तरीकों को देख पाए, बल्कि वे ये भी देख पाए कि उन्होंने क्या छोड़ दिया था।

ज्यादातर विद्यार्थी कथन को शब्दों में पूरा कर सके थे और कक्षा के एक तिहाई विद्यार्थियों ने कथन को एक बीजगणितीय व्यंजक से पूरा करने का प्रयास किया था। हालाँकि बीजगणितीय व्यंजक वैसे बहुत कम सही होता था। मैंने कुछ विद्यार्थियों को आकर ब्लैकबोर्ड पर अपने कथनों के साथ बीजगणितीय व्यंजक शब्दों में लिखने को कहा। फिर हमने यह चर्चा की कि वे कैसे जुड़े हुए थे और क्या हम गणितीय नोटेशन को बेहतर बना सकते हैं।

गतिविधि के भाग 2 ने उन्हें इसके साथ प्रयोग करने में मदद की, जो कि उपयोगी था। मुझे लगता है कि विद्यार्थियों के लिए बीजगणितीय नोटेशन और वह कथन के साथ शब्द में कैसे संबद्ध है इस संबंध में चर्चा करने में सक्षम होना मददगार था और मुझे एहसास हुआ कि मैंने उन्हें पहले कभी इसका मौका नहीं दिया था।



विचार कीजिए

- क्या किसी भी समय आपको ऐसा लगा कि हस्तक्षेप करना चाहिए?
- क्या आपके सारे विद्यार्थी गतिविधि में व्यस्त थे?
- किन बिंदुओं पर आपको लगा कि आपको और समझाना होगा?
- क्या आपने श्री जॉन की तरह कार्य को किसी भी तरह से संशोधित किया था? अगर हाँ, तो इसके पीछे आपका क्या कारण था?

## 5 क्रिकेट में बीजगणित

नेशनल करिकुलम फ्रेमवर्क (एनसीएफ, 2005) ने पाठ्यक्रम में ज्ञान तक पहुँच के बारे में अपने एक नियम का कुछ इस तरह वर्णन किया है:

ज्ञान को 'स्थितिपरक' करने और उसकी प्रासंगिकता और सार्थकता को साकार करने के लिए स्थानीय और प्रासंगिक से जुड़ना; स्कूल से बाहर के अपने अनुभवों की पुष्टि करना; इन अनुभवों के संदर्भ में अवलोकन, संवाद, वर्गीकरण, प्रश्न पूछने और तर्कशक्ति से अपने सबक सीखना।

(एनसीएफ, 2005, पृ. 33)

गतिविधि 4 का लक्ष्य यही करना है। यह गतिविधि एकीकरण अभ्यास के रूप में इस्तेमाल की जा सकती है, जहाँ विद्यार्थी पिछली गतिविधियों में सीखे गए सबकों को एक नए संदर्भ में उपयोग करते हैं, ऐसा संदर्भ जिससे वे अच्छी तरह परिचित हैं, - और वो है क्रिकेट।

वीडियो: स्थानीय संसाधनों का उपयोग करते हुए



**गतिविधि 4: रन प्रति ओवर**

इस गतिविधि में विद्यार्थी एक क्रिकेट के खेल में चर राशियों से परिचित होते हैं।



चित्र 2 क्रिकेट खेलते छात्र।

**तैयारी**

इस गतिविधि के लिए विद्यार्थी वाकई बाहर जाकर क्रिकेट खेल सकते हैं। वैकल्पिक रूप से, इसे कक्षा में ही खेला जा सकता है जहाँ प्रत्येक बॉल पर खिलाड़ी को मिलने वाले रनों की संख्या के लिए पासा फेंका जा सकता है। (पासे पर, चूँकि क्रिकेट में एक बॉल में पाँच रन कम ही होते हैं, इसलिए पासे के पाँच को शून्य माना जाएगा!) यदि पासा टेबल से नीचे गिरा तो वो आउट!

**गतिविधि**

विद्यार्थियों से निम्नलिखित कहें:

- आओ हम **5–5** ओवर क्रिकेट मैच खेलते हैं। इसके लिए हम पाँच छात्रों की दो टीमों के समूह बनाने वाले हैं। हर टीम में लड़का और लड़की दोनों होंगे। हर टीम के लिए एक विद्यार्थी को स्कोर कीपर बनाया जाएगा (हर बार लड़की नहीं!)। हर टीम को पाँच ओवर मिलेंगे।
- छ: बॉल हो जाने के बाद उस ओवर का स्कोर जोड़ दिया जाएगा।
- हर ओवर में स्कोर किए गए रनों की संख्या रिकॉर्ड करके दोनों स्कोर मिला कर तालिका 1 भरते हैं:
- 
- तालिका 1 स्कोरिंग कार्ड।

ओवर	टीम 1	टीम 2
1		
2		
3		
4		
5		
कुलयोग		

मैच के बाद कक्षा से निम्नलिखित प्रश्नों पर चर्चा के लिए कहें। बड़ी कक्षाओं में पहले विद्यार्थियों से इन प्रश्नों पर छोटे-छोटे समूहों में चर्चा करने को कहना और फिर उन्हें सारी कक्षा के साथ बांटना अच्छा काम करता है।

1. क्या हर टीम ने हर ओवर में समान रन बनाए? क्यों?
2. प्रति ओवर में लिए रनों की अधिकतम संख्या कितनी बनाई जा सकती है? क्यों? (शिक्षक के लिए नोट: विकेट के बीच दौड़ कर एक, दो या तीन रन लिए जा सकते हैं, बाउंडरी छूने पर चार रन और बिना जमीन छुए सीधे बाउंडरी के ऊपर से जाने पर छः रन – तो अधिकतम छः छक्के मार कर छत्तीस रन लिए जा सकते हैं। यह दर्शाता है एक चर राशि, जो कि सीमित मान ले सकती है।)
3. हर टीम के लिए क्या हर ओवर में लिए गए रनों की संख्या में कोई स्पष्ट रुझान दिखता है? क्या यह रुझान दोनों टीमों के लिए समान है? यदि नहीं तो आपको क्या लगता है कि रुझान अलग क्यों है?
4. यदि यह छः ओवर का मैच होता तो हर टीम द्वारा कितने रन स्कोर किए जाते? यदि हर टीम को छः ओवर मिलते तो क्या मैच का परिणाम वही होता या अलग होता?
5. निम्नलिखित में से कौन सी राशियाँ चर हैं? दूसरे शब्दों में, मैच के दौरान क्या बदला हो सकता है?
  - प्रत्येक गेंदबाज द्वारा ली गई विकेटों की संख्या
  - प्रत्येक टीम द्वारा किए गए ओवरों की संख्या
  - अलग अलग बल्लेबाजों द्वारा स्कोर किए गए चौकों की संख्या
  - मैच में उपयोग की गई गेंद का वजन।
6. मैच के दौरान और कौन सी राशियाँ बदली होंगी? कौन सी राशियाँ अचर होंगी (जो मैच के दौरान अपरिवर्तित रही होंगी)?

गतिविधि 3 के भाग 2 की तरह, विद्यार्थियों से चर और अचर की सूची का उपयोग करके बीजगणितीय व्यंजकों के साथ अपने खुद के कथन बनाएँ।

वीडियो: सभी की सहभागिता



केस स्टडी 4: श्री कपूर गतिविधि 4 के उपयोग के बारे में बताते हैं

चूँकि क्रिकेट उन सभी का पसंदीदा खेल है, विद्यार्थियों ने चर्चा में बढ़ चढ़ कर हिस्सा लिया और गतिविधि में योगदान दिया। कल मैंने विद्यार्थियों से अगले दिन संभव हो तो उनके क्रिकेट बैट और बॉल स्कूल में लाने को कहा था।

मेरी कक्षा में लड़के और लड़कियाँ दोनों हैं और मैंने सोचा लड़कियाँ शायद खुद को अलग पाएँ या लड़कों को शायद लगे कि ये सिर्फ उनके ही लिए है! इसलिए मैंने गतिविधि के बारे में उन्हें बताते समय कहा कि मैंने अखबार में राष्ट्रीय भारतीय महिला क्रिकेट टीम के बारे में पढ़ा और वे कितना अच्छा खेल रही हैं। मैंने कुछ नाम भी लिए जैसे राजस्थान से टीम कप्तान मिताली राज, बंगाल की झूलन 'बाबुल' गोस्वामी, जिसने इस खेल में शानदार प्रदर्शन के लिए मिताली की तरह सरकार का अर्जुन पुरस्कार जीता है और जो पहले कप्तान भी रह चुकी हैं।

मैंने खेल के कुछ नियमों पर भी चर्चा की जिनके बारे में गतिविधि पूरी करने के लिए जानना जरूरी था, ताकि बाद में कोई समस्या न हो। फिर हम बाहर गए और हमने यह खेल खेला। हमने लड़के और लड़कियों की मिलीजुली टीम बनाई, लड़कियों को लड़कों के विरुद्ध, लड़कों को लड़कों के विरुद्ध और लड़कियों को लड़कियों के विरुद्ध खिलाया।

पूर्ण कक्षा की चर्चा की तैयारी में मैंने कुछ बदलाव करने का फैसला किया और पहले प्रश्न 1 से 3 पर काम किया और उसके बाद ही हम बाकी के प्रश्नों पर गए। मुझे लगा कि चरों और अचरों के बारे में अन्यथा चर्चा समाप्त हो सकती है और यह महत्वपूर्ण रहा कि ऐसा नहीं हुआ क्योंकि यह उस गणित के बारे में था जिसे मैं उन्हें सिखाना चाहता थी। अतः मैंने ब्लैकबोर्ड पर प्रश्न 1 से 3 लिखे और विद्यार्थियों से अपनी पाँच की टीम में इन पर चर्चा करने के लिए कहा। फिर, हमने इस बारे में पूरी कक्षा के साथ चर्चा की।

फिर, मैंने ब्लैकबोर्ड पर प्रश्न 4 और 5 लिखे, पुनः इन पर अपनी टीम में चर्चा के लिए और शीर्षक के रूप में 'क्रिकेट के खेल में चर और अचर' के साथ अपनी पुस्तक में एक सूची बनाने के लिए उनसे कहा। ऐसा करने के लिए मैंने उन्हें पाँच मिनट का समय दिया। फिर, हमने पूरी-कक्षा के साथ चर्चा की। मैंने उन्हें हर बार 'चर' और 'अचर' शब्दों का उपयोग करने के लिए कहा ताकि वे शब्दावली से परिचित हो सकें।

पाठ की समाप्ति पर, मैं यह निश्चित रूप से कह सकता हूँ कि उनमें से अधिकांश इस बात को लेकर आश्चर्य थे कि चर राशियाँ क्या हैं और अचर राशियों का क्या अर्थ है। वे यह भी देख सकते थे कि भले ही एक अक्षर द्वारा चर राशि को इंगित किया जा रहा है तथापि वे एक संख्या हैं। कुछ विद्यार्थी बीजगणितीय अंकन में अपने कथन लिखने में समर्थ थे, अन्य शब्दों में अपने कथन का वर्णन करने में समर्थ थे। मैं उनके द्वारा सीखे गए विभेदीकरण से खुश थी और वे अपनी वर्तमान स्थिति से शिक्षण को आगे ले जाने में समर्थ थे।

पाठ की समाप्ति पर, मैंने उन्हें अब घर पर और मित्रों के साथ 'क्रिकेट के खेल में चर और अचर' पर चर्चा करने के लिए कहा। मुझे नहीं पता कि उन्होंने ऐसा किया या नहीं, लेकिन ऐसा महसूस हुआ कि वे इस विचार से सहमत थे!



विचार कीजिए

- अपने विद्यार्थियों की समझ का पता लगाने के लिए आपने क्या सवाल किए?
- क्या आपको किसी समय में लगा कि आपको हस्तक्षेप करना होगा? किन बिंदुओं पर आपको लगा कि आपको और समझाना होगा?
- किन विद्यार्थियों को आगे सुदृढीकरण की ज़रूरत हो सकती है?
- क्या किसी भी समय आपको ऐसा लगा कि हस्तक्षेप करना चाहिए? अगर हाँ, तो इसके पीछे आपका क्या कारण था?

## 6 सारांश

इस इकाई में दो महत्वपूर्ण मुद्दों पर ध्यान केंद्रित करने के लिए चर और अचर के शिक्षण के बारे में विचारों का प्रयोग किया गया है।

पहले की ज़रूरत विद्यार्थियों को उनके गणितीय विचारों और बीजगणितीय अंकन के बारे में बात करने में सक्षम बनाने के लिए थी। विद्यार्थियों को अपने विचार अभिव्यक्त करने में समर्थ होना आवश्यक है यदि वे उन्हें पूरी तरह समझना चाहते हैं और कक्षा के तत्काल प्रसंग से बाहर जाकर उनका प्रयोग करना चाहते हैं। चिंतन के लिए भाषा आवश्यक होती है और वे विद्यार्थी जिनकी विशिष्ट गणितीय शब्दावली और पदावली का स्वयं से प्रयोग करने के लिए मदद की गई है, उस समय फायदे में होते हैं जब उनसे चिंतन करने के लिए कहा जाता है।

इस इकाई का दूसरा सबसे बड़ा विचार गणितीय कथनों एवं बीजगणितीय व्यंजकों के अर्थ प्रदान करने में विद्यार्थियों को समर्थ बनाने के लिए अचरों एवं चरों की भूमिका को समझने में उनके महत्व को रेखांकित करना था।



विचार कीजिए

- ऐसे तीन विचारों की पहचान करें जिनका उपयोग आपने इस इकाई में किया है और जो दूसरे विषयों को सिखाने में काम आएँगे। अब ऐसे दो विषयों का नोट बनाएँ जिन्हें आपको जल्द ही पढ़ाना है और जिनमें कुछ छोटे परिवर्तनों के साथ उन विचारों का उपयोग किया जा सकता है।

## संसाधन

संसाधन 1: एनसीएफ/एनसीएफटीई शिक्षण आवश्यकताएँ

यह इकाई एनसीएफ (2005) और एनसीएफटीई (2009) की निम्नलिखित शिक्षण आवश्यकताओं के साथ संबंध स्थापित करती है तथा उन आवश्यकताओं को पूरा करने में आपकी मदद करेगी:

- शिक्षार्थियों को उनके शिक्षण में सक्रिय प्रतिभागी के रूप में देखें न कि सिर्फ ज्ञान प्राप्त करने वाले के रूप में; ज्ञान निर्माण के लिए उनकी क्षमताओं को कैसे प्रोत्साहित करें; रटने वाली पद्धतियों से शिक्षण को दूर कैसे ले जाएँ।
- *dt* को गणित का महत्व समझने दें और सूत्रों तथा यांत्रिक प्रक्रियाओं से आगे बढ़कर गणित को जानने का प्रयास करने दें।
- स्कूल से बाहर विद्यार्थियों के अनुभवों की पुष्टि करें: इन अनुभवों के संबंध में अवलोकन द्वारा उनके अधिगम पर ध्यान देकर, उनके साथ बातचीत कर, वर्गीकरण द्वारा, श्रेणीकरण द्वारा, सवाल पूछकर, तर्क और बहस द्वारा।

अतिरिक्त संसाधन

- *Many Right Answers: Learning in Mathematics through Speaking and Listening* by Els De Geest: <http://shop.niace.org.uk/media/catalog/product/m/a/manyrightanswers.pdf>
- A newly developed maths portal by the Karnataka government: <http://karnatakaeducation.org.in/KOER/en/index.php/Portal:Mathematics>
- National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics: <https://www.ncetm.org.uk/>
- National STEM Centre: <http://www.nationalstemcentre.org.uk/>
- National Numeracy: <http://www.nationalnumeracy.org.uk/home/index.html>
- BBC Bitesize: <http://www.bbc.co.uk/bitesize/>
- Khan Academy's math section: <https://www.khanacademy.org/math>
- NRICH: <http://nrich.maths.org/frontpage>
- Art of Problem Solving's resources page: <http://www.artofproblemsolving.com/Resources/index.php>
- Teachnology: <http://www.teach-nology.com/worksheets/math/>
- Math Playground's logic games: <http://www.mathplayground.com/logicgames.html>
- Maths is Fun: <http://www.mathsisfun.com/>
- Coolmath4kids.com: <http://www.coolmath4kids.com/>
- National Council of Educational Research and Training's textbooks for teaching mathematics and for teacher training of mathematics: <http://www.ncert.nic.in/ncerts/textbook/textbook.htm>
- AMT-01 *Aspects of Teaching Primary School Mathematics*, Block 1 ('Aspects of Teaching Mathematics'), Block 2 ('Numbers (I)'), Block 3 ('Numbers (II)'), Block 4 ('Fractions'): <http://www.ignou4ublog.com/2013/06/ignou-amt-01-study-materialbooks.html>
- LMT-01 *Learning Mathematics*, Block 1 ('Approaches to Learning') Block 2 ('Encouraging Learning in the Classroom'), Block 4 ('On Spatial Learning'), Block 6 ('Thinking Mathematically'): <http://www.ignou4ublog.com/2013/06/ignou-lmt-01-study-materialbooks.html>
- *Manual of Mathematics Teaching Aids for Primary Schools*, published by NCERT: <http://www.arvindguptatoys.com/arvindgupta/pks-primarymanual.pdf>
- *Learning Curve* and *At Right Angles*, periodicals about mathematics and its teaching: [http://azimpremjifoundation.org/Foundation\\_Publications](http://azimpremjifoundation.org/Foundation_Publications)
- Textbooks developed by the Eklavya Foundation with activity-based teaching mathematics at the primary level: [http://www.eklavya.in/pdfs/Catalouge/Eklavya\\_Catalogue\\_2012.pdf](http://www.eklavya.in/pdfs/Catalouge/Eklavya_Catalogue_2012.pdf)
- Central Board of Secondary Education's books and support material (also including *List of Hands-on Activities in Mathematics for Classes III to VIII*) – select 'CBSE publications', then 'Books and support material': <http://cbse.nic.in/welcome.htm>

संदर्भ/संदर्भग्रंथ सूची

Bruner, J. (1986) *Actual Minds, Possible Worlds*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Lee, C. (2006) *Language for Learning Mathematics: Assessment for Learning in Practice*. Buckingham: Open University Press.

National Council for Teacher Education (2009) *National Curriculum Framework for Teacher Education* (online). New Delhi: NCTE. Available from: [http://www.ncte-india.org/publicnotice/NCFTE\\_2010.pdf](http://www.ncte-india.org/publicnotice/NCFTE_2010.pdf) (accessed 12 April 2014).

National Council of Educational Research and Training (2005) *National Curriculum Framework (NCF)*. New Delhi: NCERT.

Pimm, D. (1995) *Symbols and Meanings in School Mathematics*. London: Routledge.

Sfard, A. (2010) *Thinking as Communicating*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Watson, A., Jones, K. and Pratt, D. (2013) *Key Ideas in Teaching Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Zack, V. and Graves, B. (2001). 'Making mathematical meaning through dialogue: "Once you think of it, the Z minus three seems pretty weird"', *Educational Studies in Mathematics*, vol. 46, pp. 229–71.

### अभिस्वीकृतियाँ

तृतीय पक्षों की सामग्रियों और अन्यथा कथित को छोड़कर, यह सामग्री क्रिएटिव कॉमन्स एट्रिब्यूशन-शेयरएलाइक लाइसेंस के अंतर्गत उपलब्ध कराई गई है (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>)। नीचे दी गई सामग्री मालिकाना हक की है तथा लाइसेंस के अंतर्गत ही इस प्रोजेक्ट में उपयोग की गई है, तथा इसका **Creative Commons Licence** से कोई वास्ता नहीं है। इसका अर्थ यह है कि यह सामग्री अपरिवर्तित रूप से केवल TESS-India प्रोजेक्ट में ही उपयोग की जा सकती है और यह किसी अनुवर्ती OER संस्करणों में उपयोग नहीं की जा सकती। इसमें TESS-India, OU और UKAID लोगो का उपयोग भी शामिल है।

इस यूनिट में सामग्री को पुनः प्रस्तुत करने की अनुमति के लिए निम्न स्रोतों का कृतज्ञतारूपी आभार किया जाता है:

चित्र 1: © मोहम्मद माहदी करीम, [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Autorickshaw\\_Bangalore.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Autorickshaw_Bangalore.jpg) (Figure 1: © Muhammad Mahdi Karim, [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Autorickshaw\\_Bangalore.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Autorickshaw_Bangalore.jpg))।

चित्र 2: © राजकुमार 1220, [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tribal\\_Street\\_Cricket\\_Orissa\\_India\\_1.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tribal_Street_Cricket_Orissa_India_1.jpg) के तहत <http://creativecommons.org/licenses/by/2.0/deed.en> उपलब्ध कराया गया (Figure 2: © rajkumar 1220, [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tribal\\_Street\\_Cricket\\_Orissa\\_India\\_1.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tribal_Street_Cricket_Orissa_India_1.jpg) made available under <http://creativecommons.org/licenses/by/2.0/deed.en>)।

कॉपीराइट के स्वामियों से संपर्क करने का हर प्रयास किया गया है। यदि किसी को अनजाने में अनदेखा कर दिया गया है, तो पहला अवसर मिलते ही प्रकाशकों को आवश्यक व्यवस्थाएं करने में हर्ष होगा।

वीडियो (वीडियो स्टिल्स सहित): भारत भर के उन अध्यापक शिक्षकों, मुख्याध्यापकों, अध्यापकों और विद्यार्थियों के प्रति आभार प्रकट किया जाता है जिन्होंने उत्पादनों में दि ओपन यूनिवर्सिटी के साथ काम किया है।