

ग़लतफहमियों से सीखना: बीजगणितीय व्यंजक



भारत में विद्यालय आधारित  
समर्थन के माध्यम से शिक्षक  
शिक्षा

[www.TESS-India.edu.in](http://www.TESS-India.edu.in)



<http://creativecommons.org/licenses/>



## संदेश



शिक्षकों को बाल केंद्रित कक्षा अभ्यास की ओर उन्मुख करने तथा शिक्षक प्रशिक्षण की गुणवत्ता को बेहतर बनाने के उद्देश्यों को सम्मुख रखते हुए TESS-India राष्ट्रीय स्तर पर कार्यरत है। इस दिशा में TESS-India द्वारा मुक्त शैक्षिक संसाधन (Open Educational Resources) का विकास किया गया है। ये संसाधन शिक्षकों तथा शिक्षक-प्रशिक्षकों के वृत्ति विकास (Professional development) में लाभकारी एवं उपयोगी सिद्ध होंगे। राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद, बिहार के नेतृत्व में इन संसाधनों का स्थानीयकृत किया गया है, जिसके अन्तर्गत इनके उद्देश्य के मूल को बरकरार रखते हुए इनमें स्थानीय, भाषा, बोली, प्रथाओं, संस्कृतियों तथा नियमों को सम्मिलित किया गया है। इनका उपयोग शिक्षण कार्य में सहजता एवं सुगमता पूर्वक किया जा सकता है।

राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद, बिहार के मार्गदर्शन में TESS-India द्वारा स्थानीय भाषा में तैयार मुक्त शैक्षिक संसाधन (Open Educational Resources) नेट पर आप सभी के लिए सुलभ उपलब्ध है।

शुभकामनाओं सहित।

(डॉ० मुरली मनोहर सिंह)

निदेशक

एस०सी०ई०आर०टी०, बिहार

समीक्षा एवं दिशाबोध
डॉ. मुरली मनोहर सिंह, निदेशक राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार
डॉ. सेयद अब्दुल मोईन, विभागाध्यक्ष, अध्यापक शिक्षा विभाग, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार
डॉ. कासिम खुशीद, विभागाध्यक्ष, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्
डॉ. इम्तियाज आलम, विभागाध्यक्ष, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार
डॉ. स्नेहाशीष दास राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार
डॉ. अर्चना, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार
डॉ. रीता राय, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार
श्री तेज नारायण प्रसाद, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार

स्थानीयकरण
<b>भाषा और शिक्षा</b>
डॉ. ज्ञानदेव मणि त्रिपाठी, प्राचार्य, मैत्रेय कॉलेज ऑफ एडुकेशन एण्ड मैनेजमेंट, हाजीपुर, वैशाली
श्री सुमन सिंह, प्रखंड साधनसेवी, भगवानपुर हाट, सिवान
श्री कात्यायान कुमार त्रिपाठी, प्राथमिक विद्यालय चैलीटाल, पटना
श्री कृत प्रसाद, प्रखंड साधनसेवी, हिलसा, नालंदा
<b>प्राथमिक अंग्रेजी</b>
श्री अरशद रजा, सहायक शिक्षक, प्राथमिक विद्यालय, पचासा रहुई, नालंदा
श्री संतोष सुमन, सहायक शिक्षक, बालिका उच्च विद्यालय, महुआबाग
श्री शशि भूषण पाण्डेय, सहायक शिक्षक, उत्कर्मित मध्य विद्यालय, मुकुन्दपुर, नालंदा
श्रीमती रचना त्रिवेदी, शिक्षिका, नोट्रेडेम अकादमी, पटना
<b>माध्यमिक अंग्रेजी</b>
श्री मणिशंकर, प्रधानाध्यापक, तारामणी भगवानसाव उच्च माध्यमिक विद्यालय, कोइलवर, भोजपुर
डॉ. ब्रजेश कुमार, शिक्षक, पी. एन. एंग्लो संस्कृत माध्यमिक विद्यालय, नया टोला, पटना
<b>प्राथमिक गणित</b>
श्री कृष्ण कान्त ठाकुर
श्री दिलीप कुमार, संकुल संसाधन केन्द्र समन्वयक, बुलनी हैदरपुर, नालंदा
श्री गोविन्द प्रसाद, प्रखंड साधनसेवी, चनपटिया, पश्चिमी चम्पारण
<b>माध्यमिक गणित</b>
डॉ. राकेश कुमार, भागलपुर डायट
श्री रिजवान रिजवी, उत्कर्मित मध्य विद्यालय, सिलौटा चाँद, कैमूर
श्री इन्द्रभूषण कुमार, शिक्षक, सहयोगी माध्यमिक विद्यालय, हाजीपुर, वैशाली
<b>प्राथमिक विज्ञान</b>
श्री मनोज त्रिपाठी, प्रखंड साधनसेवी, बरहारा, भोजपुर
श्री शशिकान्त शर्मा, प्रखंड साधनसेवी, आरा, भोजपुर
श्री रणबीर सिंह, संकुल संसाधन केन्द्र समन्वयक, आदर्श आवासीय मध्य विद्यालय शिक्षक संघ, सहरसा
<b>माध्यमिक विज्ञान</b>
श्री जी.वी.एस.आर प्रसाद
श्री मुकुल कुमार, शिक्षक, सहायक शिक्षक, गोरखनाथ सूर्यदेव माध्यमिक विद्यालय, राजापाकर वैशाली


**TESS-India (Teacher Education Through School Based Support)** का लक्ष्य है भारत में मुक्त शैक्षिक संसाधनों के द्वारा प्राथमिक और माध्यमिक स्तरों पर शिक्षकों के कक्षा अभ्यासों को बेहतर करना। ये संसाधन शिक्षकों के छात्र-केन्द्रित, भागीदारी दृष्टिकोण को विकसित करने में सहायता करेंगे।

**TESS-India** के मुक्त शैक्षिक संसाधन (**Open Education Resources – OERs**) शिक्षकों को स्कूल की पाठ्यपुस्तक के लिए सहायक पुस्तिका प्रदान करते हैं। ये संसाधन शिक्षकों के लिए गतिविधियाँ प्रदान करते हैं जो वे कक्षा में अपने छात्रों के साथ कर सकते हैं। साथ ही इनमें केस स्टडी भी हैं जो ये दर्शाते हैं कि किस प्रकार दूसरे शिक्षकों ने उस विषय को सिखाया है। संबंधित संसाधन शिक्षकों को पाठ योजना बनाने में और विषय पर ज्ञान वर्धन करने में उनकी सहायता करते हैं।

**TESS-India** के मुक्त शैक्षिक संसाधन भारतीय पाठ्यक्रम और संदर्भों के अनुकूल हैं। ये भारतीय तथा अंतर्राष्ट्रीय लेखकों के सहयोग से तैयार किये गये हैं और ये ऑनलाइन तथा प्रिंट उपयोग के लिए उपलब्ध है (<http://www.tess-india.edu.in>)। मुक्त शैक्षिक संसाधन अनेकों संस्करणों में उपलब्ध हैं जो प्रत्येक राज्य के लिए उपयुक्त है जहाँ TESS India कार्यरत है। उपयोगकर्ता इन संसाधनों को अनुकूल और स्थानीयकृत करने के लिए स्वतंत्र हैं ताकि ये स्थानीय आवश्यकताओं और संदर्भों को पूरा कर सकें।

**TESS-India** मुक्त विश्वविद्यालय, ब्रिटेन के नेतृत्व में तथा ब्रिटेन की सरकार द्वारा वित्त-पोषित है।

### **वीडियो संसाधन**

इस इकाई की कुछ गतिविधियों के साथ निम्न प्रतीक का उपयोग किया गया है:  . इससे संकेत मिलता है कि निर्दिष्ट अध्यापन संबंधी थीम के लिए **TESS-India** वीडियो संसाधनों को देखना आपके लिए उपयोगी होगा।

**TESS-India** वीडियो संसाधन भारत में अनेक प्रकार की कक्षाओं के संदर्भ में मुख्य अध्यापन तकनीकों का वर्णन करते हैं। हमें आशा है कि वे आपको इसी प्रकार के अभ्यासों के साथ प्रयोग करने के लिए प्रेरित करेंगे। उनका उद्देश्य पाठ (टेक्स्ट) पर आधारित इकाइयों के माध्यम से काम करने के आपके अनुभव का पूरक होना और उसे बढ़ाना है।

**TESS-India** वीडियो संसाधनों को ऑनलाइन देखा या **TESS-India** की वेबसाइट, <http://www.tess-india.edu.in/> से डाउनलोड किया जा सकता है। वैकल्पिक रूप से, आप ये वीडियो सीडी या मेमोरी कार्ड के माध्यम से भी देख सकते हैं।

संस्करण 2.0 SM11v1  
Bihar

तृतीय पक्षों की सामग्रियों और अन्यथा कथित को छोड़कर, यह सामग्री क्रिएटिव कॉमन्स एट्रिब्यूशन-शेयरएलाइक लाइसेंस के अंतर्गत उपलब्ध कराई गई है।  
<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>

**TESS-India is led by The Open University UK and funded by UK aid from the UK government**

## यह इकाई किस बारे में है

बीजगणितीय व्यंजक गणितीय कथन होते हैं, जैसे  $3x + 4$ । उनमें बराबर (=) का चिह्न नहीं होता, जो उन्हें बीजगणितीय समीकरणों से अलग बनाता है। बीजगणितीय व्यंजक गणितीय पाठ्यचर्या और सामान्य गणित में एक महत्वपूर्ण भूमिका अदा करते हैं। गणित में आगे बढ़ने और अच्छा करने के लिए, छात्र-छात्राओं को व्यंजक पढ़ने और लिखने में समर्थ होना चाहिए, और बीजगणितीय व्यंजकों की गणना और फेरबदल में कुशल होना चाहिए।

कई छात्र-छात्राओं के लिए बीजगणितीय व्यंजकों को सीखने में समस्या यह है कि उनके लिए यह काम केवल याद रखना और एल्गोरिथम (कलनविधि) का अनुसरण करना होता है। व्यापकता व्यक्त करने, चरों और स्थिरांकों के बीच संबंधों की व्याख्या करने, और खेल-खेल में और रचनात्मक तरीके से संभावना ढूँढने की बीजगणित की शक्ति और सुंदरता अक्सर खो जाती है। बीजगणित और इसके व्यंजकों को गणित की भाषा समझा जाता है, और उनका उपयोग लोगों, विचारों, तत्वों और संरचनाओं के बीच संबंधों की व्याख्या करने के लिए उपयोग किया जाता है। छात्र-छात्राएँ विद्यालय में अक्सर अपनी शिक्षा में इसका अनुभव नहीं करते और इसलिए परीक्षा उत्तीर्ण करने के सिवा उन्हें बीजगणितीय व्यंजकों की शिक्षा का उद्देश्य और वास्तविक जीवन से उनका संबंध दिखाई नहीं दे सकता।

इस इकाई में छात्र-छात्राओं को बीजगणितीय व्यंजकों के उद्देश्य को जानने में मदद करने के लिए संदर्भों का उपयोग और विकास करके बीजगणितीय व्यंजक सिखाने के कुछ विभिन्न तरीकों के बारे में बात की जाएगी। सबसे पहले इसमें वास्तविक जीवन के संदर्भ में चरों और स्थिरांकों की भूमिका की खोज की जाएगी; फिर इसमें प्रतिस्थापन की शक्ति पर और इस बात पर नज़र डाली जाएगी कि यह किस प्रकार से रचनात्मक रूप से चिंतन और गलतफहमियों से सीखने-सिखाने की प्रक्रिया को बढ़ा सकता है।



### ज़रा सोचिए

- अपनी कक्षा के बारे में सोचें। बीजगणितीय व्यंजकों के बारे में सीखते समय आपको अपने छात्र-छात्राओं में क्या समस्याएँ लगती हैं? आपको यह किस बारे में लगती है? वे किसे नापसंद करते हैं? आपके अनुसार वे क्या अलग चाहते हैं?
- फिर उस समय के बारे में सोचें जब आप विद्यालय में बीजगणितीय व्यंजक सीखते थे – आपने क्या महसूस किया? इसमें आपने क्या पसंद किया? इसमें आपने क्या नापसंद किया? आप क्या अलग चाहते थे?

### आप इस इकाई में सीख सकते हैं

- चर और स्थिरांकों के बीच संबंधों की पहचान करने में किस प्रकार छात्र-छात्राओं की मदद करें।
- बीजगणितीय अभिव्यक्तियों में प्रयोजन देखने में छात्र-छात्राओं की मदद के लिए संदर्भों का उपयोग करने और उन्हें विकसित करने पर कुछ विचार।
- गलतफहमियों को जानने और उनका शिक्षण साधन के रूप में उपयोग करने पर कुछ विचार।

इस इकाई का संबंध संसाधन 1 में दर्शाई गई NCF (2005), BCF (2008) और NCFTE (2009) शिक्षण आवश्यकताओं से है।

### 1 वास्तविक जीवन के संदर्भ में चर और स्थिरांक



चित्र 1: सोनपुर मेला, बिहार

बिहार का सोनपुर (हरिहर क्षेत्र) मेला एशिया का सबसे बड़ा पशु मेला है। मेला के दौरान यह हमेशा भीड़ से भरा रहता है। कामकाज के समय यहाँ अत्यन्त गतिशील वातावरण रहता है। सुबह से लेकर शाम तक जितनी तेज़ी से यहाँ वातावरण बदलता है उससे एक हॉकर से लेकर कार पार्किंग या दुकान में कर्मचारियों की संख्या, सर्कस/नौटंकी देखने वाली भीड़ तक सभी कुछ प्रभावित होता है। वातावरण में इस बदलाव को गतिविधि कहा जाता है।

प्रोफेशनल (वृत्तिगत) गणितज्ञ इस गतिकी का अनुमान लगाने और उनकी व्याख्या करने के मॉडल विकसित करते हैं। ऐसा करके वे शहरी योजनाकारों, स्थानीय नीति निर्माताओं और कानून प्रवर्तन विभागों को यह अनुमान लगाने में सक्षम बनाता है कि श्रम, प्रावधानों, सहायता संरचना आदि के संबंध में विभिन्न समय पर क्या आवश्यक हो सकता है।

यह गणितीय निदर्शन इस निर्णय पर आधारित है कि समान व्यवस्था में चर (संख्यात्मक मात्राएँ जो अलग-अलग होंगी) और स्थिरांक (मात्राएँ जो समान रहेंगी) क्या हैं। गतिविधि 1 में शहर के जीवन के एक उदाहरण का उपयोग करके इसे आपके छात्र-छात्राओं को पढ़ाने के तरीका बताया गया है। (यदि आपके छात्र-छात्रा सोनपुर मेला या ऐसे किसी वातावरण से अपरिचित हैं, तो आपको इस उदाहरण में उनका जाना-पहचाना संदर्भ उपयोग करना चाहिए।) अगले चरण में यह तय किया जाएगा कि कौन से चर संबंधित हैं और किस तरह से, और गतिविधि 2 में यह बताया गया है कि इसे अपने छात्र-छात्राओं के साथ कैसे करें।

गतिविधियों 1 और 2 में, आप और आपके छात्र-छात्राएँ सोचेंगे कि किसी मॉडल का सरल संस्करण कैसे बनाया जाय; ध्यान दें कि एक ही सही या गलत उत्तर नहीं है। ये कार्य विशेष रूप से उन छात्र-छात्राओं के लिए बेहतर काम करते हैं, जो जोड़े में या छोटे समूहों में काम करते हैं, क्योंकि इससे अधिक विचार तैयार होते हैं और अटकने पर छात्र-छात्रा मानवीय सहायता प्रदान कर सकते हैं।

इस इकाई में अपने छात्र-छात्राओं के साथ गतिविधियों के उपयोग का प्रयास करने के पहले अच्छा होगा कि आप सभी गतिविधियों को पूरी तरह (या आंशिक रूप से) स्वयं करके देखें। यह और भी बेहतर होगा यदि आप इसका प्रयास अपने किसी सहकर्मी के साथ करें क्योंकि जब आप अनुभव पर विचार करेंगे तो आपको मदद मिलेगी। स्वयं प्रयास करने से आपको शिक्षार्थी के अनुभवों के भीतर झांकने का मौका मिलेगा, जो परोक्ष रूप से आपके सीखने-सिखाने की प्रक्रिया और एक शिक्षक के रूप में आपके अनुभवों को प्रभावित करेगा। जब आप तैयार हों, तो अपने छात्र-छात्राओं के साथ गतिविधियों का उपयोग करें। पाठ के बाद, सोचें कि गतिविधि किस तरह हुई और उससे क्या सीख मिली। इससे आपको सीखने वाले छात्र-छात्राओं पर ध्यान केंद्रित रखने वाला अधिक शैक्षिक वातावरण बनाने में मदद मिलेगी।

### गतिविधि 1: स्थिरांक और चरों को पहचानना

अपने छात्र-छात्राओं को निम्न बताएँ:

- कल्पना करें कि आप एक प्रोफेशनल (वृत्तिगत) गणितज्ञ हैं और आप सोनपुर मेला की गतिकी की व्याख्या के लिए एक गणितीय मॉडल तैयार करने पर काम कर रहे हैं। आपको पहले सोनपुर मेला में भूमिका अदा करने वाले सभी चर (बदलने वाली मात्राएँ) और स्थिरांक (न बदलने वाली मात्राएँ) पहचानने होंगे।
- इस व्यवस्था में सभी सोनपुर मेला आने वाले आगन्तुकों और 'तत्वों' की सूची बना लें। कुछ उदाहरण जानवरों एवं पक्षियों के विभिन्न प्रजातियों की संख्या, कार पार्किंग, हॉकर या दुकानों की संख्या हो सकते हैं।

जब आपके छात्र-छात्राएँ कुछ विचार तैयार कर लें, तो बोर्ड पर नीचे सूची में लिख लें:

- मेला की सुरक्षा में नियुक्त पुलिस विभाग में काम करने वाले पुरुष और महिलाओं की संख्या
- कार पार्किंग की संख्या
- मेला के नागरिक रखरखाव में नगर निगम द्वारा नियुक्त कर्मचारियों की संख्या
- पार्किंग लॉट कर्मी की संख्या
- हॉकर की संख्या
- मेले में जानवरों की संख्या
- दुकान स्वामी की संख्या
- मेले में मौजूद रेस्टोरेंट स्वामी की संख्या
- बिजली आपूर्ति कंपनियों की संख्या
- गाय/हाथी/घोड़ा/तोता खरीदना चाहने वाले आगंतुकों की संख्या

अब अपने छात्र-छात्राओं को बताएँ:

- इस सूची में इस संदर्भ में 'आगन्तुकों' या 'तत्वों' के कुछ और उदाहरण दिए गए हैं। इस सूची और अपने उदाहरणों के बीच, तय करें कि कौन से चर (बदलने वाली मात्रा) हैं और कौन से स्थिरांक (न बदलने वाली मात्रा) हैं। क्या इनमें से कोई दोनों होगा? यदि ऐसा है, तो यह किसपर निर्भर करेगा?



गतिविधि 1 से 4 का उपयोग कक्षा VII से कक्षा X तक के बीजगणितीय अवधारणा की समझ बनाने के लिए किया जा सकता है।

गतिविधि 1 में छात्र-छात्राओं से सोनपुर मेले में चरों और स्थिरांकों को पहचानने के लिए कहा गया। गणितीय मॉडल बनाने के लिए, अब छात्र-छात्राओं को सोचना होगा कि किस प्रकार ये स्थिरांक और चर एक-दूसरे को कैसे प्रभावित करते हैं और उनसे कैसे संबंधित हैं।

गतिविधि में छात्र-छात्राओं को मस्तिष्क छवि बनाने को कहा जाता है। मस्तिष्क छवि आमतौर पर अवधारणा (नोड के रूप में) को दर्शाने वाली शब्दों या वाक्यांशों की एक शृंखला, और एक रेखा (या लिंक) जो इसे अन्य अवधारणा से जोड़ती है, जो दोनों का संबंध व्यक्त करता है। अवधारणा नक्शा मस्तिष्क छवि के समान होता है, बस यह अंतर होता है कि मस्तिष्क छवि में एक केंद्र होता है, जबकि अवधारणा नक्शा रैखिक हो सकता है। मस्तिष्क छवि एक अच्छा औजार है और छात्र-छात्राओं की उनकी समझ का अन्वेषण करने और समीक्षा करने में उनकी मदद करने की एक प्रभावी रणनीति है; इसे यह पता करने के

लिए एक मूल्यांकन औजार के रूप में भी उपयोग किया जा सकता है कि छात्र-छात्रा क्या जानते हैं और उनकी गलतफहमियाँ क्या हैं। गतिविधि 2 में कोई सही या गलत उत्तर नहीं हैं।

## गतिविधि 2: बीजगणितीय व्यंजकों का विकास

अपने छात्र-छात्राओं के साथ, कल्पना करें कि आप एक प्रोफेशनल (वृत्तिगत) गणितज्ञ हैं और आप बिहार के सोनपुर मेले की गतिकी की व्याख्या के लिए एक गणितीय मॉडल तैयार करने पर काम कर रहे हैं। आपने अपने चर (बदलने वाली मात्रा) और स्थिरांक (न बदलने वाली मात्रा) को पहले ही पहचान लिया है जो मेले में भूमिका अदा करते हैं।

अगला चरण यह पहचानना है कि किस प्रकार चर एक-दूसरे से और स्थिरांकों से संबंधित हैं। इसे प्रबंधित करने योग्य रखने के लिए, छात्र-छात्राओं के प्रत्येक समूह को यह तय करना चाहिए कि किन चार चरों पर वह ध्यान देंगे। अब अपने छात्र-छात्राओं को यह बताएँ:

- इन चरों का मस्तिष्क छवि बनाएँ और इन विचारों को जोड़ते हुए पंक्तियाँ लिखें कि आपके अनुसार वे कैसे संबंधित हो सकते हैं। मस्तिष्क छवि में कुछ स्थिरांक जोड़ें, यदि आप समझते हैं कि वे संबंध में एक भूमिका निभाते हैं। याद रखें कि इसके लिए कोई सही या गलत जवाब नहीं है! उदाहरण के लिए, आप यह सोच सकते हैं कि इस बात को ध्यान में रखते हुए पुलिस अधिकारियों की संख्या बदलनी चाहिए कि किसी समय पर कितने आगंतुक (खरीदार) मौजूद हैं, या दुकानों या कारों की संख्या के आधार पर।
- अब तय करें कि आपके समूह द्वारा ऊपर बताए संबंधों में आप किन परिमाणकों का उपयोग करेंगे। इसे गणितीय व्यंजक के रूप में लिखें। उदाहरण के लिए, आप यह कह सकते हैं कि आपको हर दस दुकानों, 100 आगंतुकों या 50 कारों के लिए एक पुलिस अधिकारी लगेगा; इस स्थिति में आप पुलिस अधिकारियों की संख्या के मॉडल को इस प्रकार लिख सकते हैं:  $s/10 + v/100 + c/50$ । याद रखें कि यह कोई सही या गलत जवाब नहीं है!

जब छात्र-छात्राएँ कुछ गणितीय व्यंजक तैयार कर लें, तो उन्हें उनकी मॉडलिंग के लिए कुछ संभावित परिणाम सोचने के लिए कहें। उन्हें यह करने को कहें:

- इन चरों के लिए मानों की श्रेणी का अनुमान लगाएँ। जिन स्थितियों में आपको श्रेणी का अनुमान लगाने में परेशानी आए, परेशानी के कारणों को पहचानें। उदाहरण के लिए, सुरक्षाकर्मी केन्द्र संख्या एक से कम नहीं हो सकती, क्योंकि आपके पास आधा केन्द्र नहीं हो सकता। आपके पास अनंत सुरक्षाकर्मी केन्द्र भी नहीं हो सकते, क्योंकि वे अत्यधिक स्थान लेते हैं। सुरक्षाकर्मी केन्द्र की अधिकतम संख्या का अनुमान लगाना कठिन है, क्योंकि यह कई कारणों पर निर्भर करेगा।
- तय करें कि किन चरों को आप आसानी से नियंत्रित कर सकते हैं? किसी चर को नियंत्रित करने का अर्थ यह हो सकता है कि इसकी श्रेणी या सीमा (परिसर) को सीमित किया जा सकता है या यह कि इसके मान स्थिति को बहुत प्रभावित किए बिना स्थिर किया जा सकता है।
- गतिविधि के अंत में, पूरी कक्षा को इस बिंदु के बारे में चर्चा करने को कहें: वास्तव में, मॉडलिंग में उपयोग किए जाने वाले परिमाणक आँकड़ों पर आधारित होंगे। यदि आपको इसे संगठित करना होता, तो आप किस प्रकार सूचना एकत्रित कर पाते?

## केस स्टडी 1: श्रीमती अपराजिता गतिविधि 1 एवं 2 के बारे में अपने अनुभव बताती हैं

यह एक शिक्षिका की कहानी है, जिसने अपने माध्यमिक वर्गकक्ष के छात्र-छात्राओं के साथ गतिविधि 1 और 2 को



## आजमाया /

- मैं यह गतिविधियाँ अपने छात्र-छात्राओं के साथ करना चाहती थी, क्योंकि मैंने सोचा कि गणित को वास्तविक जीवन में देखने और संगठित करने का यह एक सुंदर उदाहरण था। पहले हमने पूरी कक्षा के साथ कुछ उदाहरण सोचे। मैंने सीधे उनसे इन्हें चरों और स्थिरांकों में अलग-अलग करने को कहा। इस प्रारंभिक चर्चा ने उन्हें सजग कराया कि यह निर्धारित करना हमेशा आसान नहीं होता। उदाहरण के लिए, कार पार्किंग की संख्या को स्थिरांक माना जा सकता है; हालाँकि, यदि आपने लंबे समय से परिस्थिति को देखा है – उदाहरण के लिए दो वर्षों से – तो यह चर बन सकता है, क्योंकि सैद्धांतिक रूप से, यदि स्थान और पैसा होता तो अधिक कार पार्किंग बनाई जा सकती थी।

अधिक उदाहरण ढूँढने और यह कारण सोचने के लिए उन्होंने जोड़े में काम किया कि कब व क्यों उदाहरण चर और स्थिरांक था। उनके उदाहरणों और वर्गीकरणों को ब्लैकबोर्ड पर लिखा गया। इनका उपयोग फिर गतिविधि 2 पर कार्य करने के लिए किया गया: इस बारे में सोचना कि वे एक-दूसरे से कैसे संबंधित हैं और इसे व्यंजकों के रूप में लिखकर और गुणांकों का निर्णय करके गणितीय रूप में रिकॉर्ड कैसे करें। एक छात्र ने कहा कि उसने किसी अनुपात को प्रदर्शित करने के लिए गुणांकों पर कभी विचार नहीं किया और यह कि अब उसे अचानक यह समझ आ गया कि व्यंजकों के साथ काम करते समय ये नियम क्यों होते हैं।

पहली बार, छात्र-छात्राओं को यह विचार असहज लगा कि इसमें कोई भी सही या गलत उत्तर नहीं हो सकता। हालाँकि, समान चरों और स्थिरांकों वाले संभावित व्यंजकों के बारे में कुछ विचार साझा करने के बाद, वे यह देख पाए कि यह ऐसा क्यों था और वे अपने उत्तरों में अधिक रचनात्मक बने।

चूँकि मैं वास्तव में इन गतिविधियों द्वारा छात्र-छात्राओं को यह बताना चाहती थी कि वास्तविक जीवन में गणित को कैसे देखा और पहचाना जा सकता है, इसलिए मैंने गृहकार्य में उन्हें रात में उनके सामने आने वाली किसी स्थिति के साथ यही बात करने को कहा। उदाहरण के लिए, बस स्टॉप पर प्रतीक्षा करते समय, परिजनों के साथ भोजन करते समय या अपना गृहकार्य करते समय चरों और स्थिरांकों को पहचानना और यह देखना कि वे एक-दूसरे से कैसे संबंधित हैं।

## अपने सीखने-सिखाने की प्रक्रिया के बारे में सोचना

अपनी कक्षा के साथ ऐसा कोई अभ्यास करने के बाद यह सोचें कि क्या ठीक रहा और क्या कम ठीक रहा। ऐसे सवाल की ओर ध्यान दें, जिसमें छात्र-छात्राओं की रुचि दिखाई दे और वे आगे बढ़ते हुए नजर आएँ और जिनका स्पष्टीकरण करने की आपको आवश्यकता हो। ऐसे चिंतन से वह 'स्क्रिप्ट' मिल जाती है, जिसकी मदद से आप छात्र-छात्राओं के मन में गणित के प्रति रुचि जगा सकते हैं और उसे मनोरंजक बना सकते हैं। अगर छात्र-छात्राओं को समझ नहीं आ रहा है और वे कुछ नहीं कर पा रहे हैं, तो इसका मतलब है कि उनकी इसमें सम्मिलित होने की रुचि नहीं है। जब भी आप गतिविधियाँ करें, इस चिंतनशील अभ्यास का उपयोग करें यह ध्यान देते हुए, जैसे श्रीमती अपराजिता ने किया, क्योंकि कुछ छोटी-छोटी चीजों से काफी फर्क पड़ता है।



### ज़रा सोचिए

उपर्युक्त चिंतन को बढ़ावा देने वाले अच्छे प्रश्न हैं:

- आपके वर्गकक्ष में गतिविधि कैसी रही? क्या सभी छात्र-छात्राओं ने भाग लिया?
- छात्र-छात्राओं से किस प्रकार की प्रतिक्रिया अपेक्षित थी? क्यों?
- अपने छात्र-छात्राओं की समझ का पता लगाने के लिए आपने क्या सवाल किए?
- क्या किसी भी समय आपको ऐसा लगा कि हस्तक्षेप करना चाहिए?

- किन बिंदुओं पर आपको लगा कि आपको और समझाना होगा?
- क्या आपने कार्य में किसी भी तरीके का संशोधन किया? अगर हाँ, तो इसके पीछे आपका क्या कारण था?

## 2 संभावनाओं के बारे में सोचने के लिए प्रतिस्थापन का उपयोग करना

प्रतिस्थापन एक सशक्त और आवश्यक चिंतन औजार है। वास्तविक जीवन में, प्रतिस्थापन का उपयोग निरंतर होता है: उदाहरण के लिए, कल के भोजन से अलग बनाने के लिए यह तय करना कि आज के भोजन में कौन सी बूटियाँ और मसाले उपयोग किए जाएँ; परिवहन का कौन सा साधन उपयोग करें (क्या आप पैदल चलेंगे, या रिक्शा या बस लेंगे?), या कौन सी साड़ी पहनें। प्रतिस्थापन में संभावनाओं और विकल्पों के साथ-साथ सीमाओं पर भी विचार करना शामिल है। उदाहरण के लिए, अपनी ड्रेस बदलते समय रेशमी साड़ी को कैल्क्यूलेटर से बदलना बहुत ठीक नहीं होगा, लेकिन इस बात के लिए ठीक हो सकता है कि आप अपने पैसे कहाँ खर्च करेंगे। प्रतिस्थापन इसलिए परिवर्तन की सुविधा देता है – जीवन का चटपटापन। गणित में प्रतिस्थापन की चिंतन प्रक्रिया वास्तविक जीवन के ही समान है। इसमें उदाहरणों, विकल्पों और संभावनाओं पर विचार करने के साथ-साथ सीमाओं और प्रतिबंधों से अवगत रहना शामिल है।



### ज़रा सोचिए

- आपके अनुसार गणितीय प्रतिस्थापन वास्तविक जीवन के प्रतिस्थापन से किस प्रकार समान या अलग है?
- आप प्रतिस्थापन पर कार्य कर रही कक्षा के साथ समय क्यों बिताना चाहेंगे?

## प्रतिस्थापन के साथ काम करते समय अधिगम के अवसर

गणित में अपने अध्ययन के लिए छात्र-छात्राओं को प्रतिस्थापन का कौशल सीखना होगा – अभ्यास पुस्तक के कई अभ्यास और समस्याओं में छात्र-छात्राओं को यह कौशल दिखाने को कहा जाता है।

छात्र-छात्राओं को प्रतिस्थापन वाले सवाल हल करने के लिए देने से गणित सीखने के वे अन्य अवसर भी प्राप्त होते हैं, जो बहुत स्पष्ट नहीं होते, लेकिन जो समान रूप से महत्वपूर्ण और लाभप्रद होते हैं। इनमें से कुछ, जिन पर आगे खोजबीन होगी, हैं:

- किसी बीजगणितीय व्यंजक का क्या मतलब हो सकता है, इस बारे में कहानियाँ बनाकर गणितीय व्यंजकों को जीवंत बनाने के लिए प्रतिस्थापन एक औजार है। गतिविधि 3 इसका एक उदाहरण है।
- प्रतिस्थापन किसी विशिष्ट संख्यात्मक उदाहरण को व्यापक बनाने का एक औजार है। गतिविधि 4 इसका एक उदाहरण है।
- गणितीय संबंध, गुणधर्म और सीमाएँ पता करने के लिए गतिविधि 4 में इसके कुछ उदाहरण हैं।

## कल्पनाशीलता के विकास के लिए प्रतिस्थापन का उपयोग करना:

बीजगणित और इसके व्यंजकों को अक्सर गणित की भाषा मानी जाती है, क्योंकि वे संबंध बताते हैं। बीजगणितीय व्यंजकों में जोड़-तोड़ या फेरबदल पर पाठ्यपुस्तक से कई पृष्ठ का अभ्यास करते समय, छात्र-छात्राओं को इसे सुवक्ता भाषा के रूप में न पहचानने के लिए माफ किया जा सकता है।

अगली गतिविधि बीजगणितीय व्यंजकों को पढ़ने में कुछ आनंद प्रस्तुत करने के लिए लक्षित है और इसमें छात्र-छात्राओं को इस बारे में अपनी स्वयं की कहानियाँ बताने के लिए कहा जाता है कि व्यंजक का क्या अर्थ होता है और यह कौन सी स्थिति

बताता है। इसका अर्थ है कि प्रतीकों को किसी वर्णन या कहानी से प्रतिस्थापित करके छात्र-छात्राओं को प्रतीकात्मक गणित को अर्थ देने को कहा जाता है। उदाहरण के लिए:

- व्यंजक  $\frac{x}{n} + 3n$  लोगों के किसी समूह (x) के बारे में हो सकता है, जो समान संख्या में कई बसों (n) में सवार हुए। कुछ लोग देर से आए और हर बस को अन्य तीन लोगों को शामिल करना पड़ा।
- व्यंजक 1.3(2100m), व्यंजक 1.3 [3(700)m] से आया हो सकता है और उन 700 अंतरिक्ष एलियन के बारे में हैं, जो भागलपुर में उतरे हैं। वे पहली बार भारत आए हैं। उन्होंने देखा कि यहाँ चाय नाम का एक पेय लोगों को बहुत पसंद है, जो 1 रु. प्रति कप मिलता है। उन्होंने चाय पी और उन्हें इतनी पसंद आई कि हर एक ने तीन-तीन कप पी। वे चाय की गुणवत्ता और चायवाले की सेवा से इतने खुश हुए कि पैसे देते समय उन्होंने 30 प्रतिशत टिप दी।

### गतिविधि 3: इसका क्या मतलब हो सकता है?

अपने छात्र-छात्राओं को निम्न बताएँ:

यहाँ पर पाठ्यपुस्तक से लिए गए कुछ बीजगणितीय व्यंजक दिए गए हैं:

- $30u + 44v$
- $3x + 1$
- $3\sqrt{4}$
- $\frac{18(3x + 1)}{6}$
- $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

अपनी कल्पनाशीलता का उपयोग करें और एक कहानी बनाएँ कि हर व्यंजक का क्या मतलब हो सकता है। व्यंजक किस स्थिति को दिखा रहा हो सकता है? यह और किस बारे में हो सकता है?



### वीडियो: कहानी सुनाना, गीत, रोल प्ले और नाटक

आप मुख्य संसाधन 'कहानी सुनाना, गीत, रोल प्ले और नाटक' पर भी एक नजर डालना चाह सकते हैं।

### केस स्टडी 2: गतिविधि 3 के उपयोग का अनुभव डा. किरण बताती हैं

किसी व्यंजक को फिट करने के लिए किसी वास्तविक कहानी के बारे में सोचना मुझे खुद भी आसान नहीं लगा। लेकिन मैंने पाया कि बस में सवार लोगों और अत्यधिक चाय पीने वाले एलियन के बारे में दिए गए उदाहरणों ने मेरी वास्तव में मदद की और अन्य उदाहरण सोचने के लिए मुझे अधिक स्वतंत्रता और रचनात्मक रूप से सोचने का अवसर दिया। मैंने यह तय किया कि चूँकि इसने मेरे लिए बहुत अच्छा काम किया, मैं इसे आगे बढ़ाकर अपने छात्र-छात्राओं के साथ इसी तरीके का उपयोग करूँगी। इसलिए मैंने ब्लैकबोर्ड पर बस और एलियन की कहानियों के बारे में लिखते हुए गतिविधि

की शुरुआत की, उन्हें कहानी के बारे में सोचने को कुछ समय (बहुत ज्यादा नहीं) दिया और फिर वर्गकक्ष के साथ साझा किया।

फिर मैंने गतिविधि 3 के व्यंजकों को ब्लैकबोर्ड पर लिखा। राहुल ने तुरंत सोचा कि व्यंजक  $3x + 1$  इस बारे में कहानी बता सकता है कि तीन कप चाय बनाने की लागत क्या होगी: पानी और चाय के लिए  $x$  रुपए, और किसी चीज़ के लिए 1 रुपए स्थिर लागत। कुछ छात्र-छात्रा सहमत हुए और कुछ नहीं, लेकिन बाद में हुई चर्चा रोचक थी। इससे मुझे महसूस हुआ कि चर्चा शुरू करने के लिए एकदम सही उत्तरों के बजाय थोड़े गलत उदाहरण के साथ काम करना ज्यादा प्रभावी होता है।



### ज़रा सोचिए

- अपने छात्र-छात्राओं की समझ का पता लगाने के लिए आपने क्या सवाल किए?
- क्या आपने श्रीमती किरण की तरह कार्य को किसी तरह बदला था? अगर हाँ, तो इसके पीछे आपका क्या कारण था?

### 3 गलतफहमियाँ पता करने के लिए सामान्यीकरण का उपयोग करना

जब आपको  $2(3 - 8)$  जैसे व्यंजक दिखाई दें, तो आप तुरंत देख सकते हैं कि इसे  $(2 \times 3) - (2 \times 8)$  के रूप में फिर से लिखा जा सकता है क्योंकि यह बंटन के नियम का एक उदाहरण है जहाँ  $a(b - c) = a \times b - a \times c$  है।

ऐसे ढाँचा (पैटर्न) और सामान्यीकरण का पता लगाना गणित में मददगार होता है क्योंकि इससे समस्याओं का समाधान करना आसान हो जाता है। नकारात्मक पक्ष यह है कि कभी-कभी आपको कुछ ढाँचा दिखाई देगा और इसलिए आप इसे सामान्यीकृत कर देंगे, जबकि वास्तव में यह एक विशेष स्थिति है और केवल कुछ ही परिस्थितियों में सही होगी। अगली गतिविधि आपको संख्यात्मक व्यंजकों से सामान्यीकृत बीजगणित लिखने के कुछ उदाहरण देती है।

#### गतिविधि 4: विशिष्ट को सामान्यीकृत रूप से प्रतिस्थापित करना

अपने छात्र-छात्राओं को निम्न बताएँ:

- नीचे वे व्यंजक और समीकरण दिए गए हैं जो बीजगणितीय व्यंजकों और समीकरणों द्वारा अपनाए जा सकने वाले सामान्यीकृत रूप के उदाहरण हैं। इनमें से कुछ समीकरण हैं, न कि केवल व्यंजक – सुनिश्चित करें कि आपको अंतर पता है।

1.  $2(3 - 8)$

2.  $12 + (13 + 81) = (12 + 13) + 81$

3.  $2 + 2 = 2 \times 2$

4.  $1 / (\frac{1}{4}) = 4$

5.  $-(-7) = 7$

6.  $42 + 0 = 42$

7.  $23 \times 1 = 23$

8. 120 का 5 प्रतिशत

9.  $(12 + 51)/(12 \times 51)$

10.  $2 + 3 = 3 + 2$

11.  $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6}$

- इनके लिए सामान्य बीजगणितीय व्यंजक या समीकरण लिखें। उनमें से कुछ के एक से अधिक हल हैं, इसलिए नवोन्मेषी बनें!
- क्या ये हमेशा सत्य होंगे? क्या आप यह कह सकते हैं कि वे किसी भी संख्या के लिए मान्य होंगे?

### वीडियो: अनुश्रवण करना और फीडबैक देना



आप मुख्य संसाधन 'अनुश्रवण करना और फीडबैक देना' पर भी एक नजर डाल सकते हैं।

### केस स्टडी 3: श्रीमती इन्दु गतिविधि 4 के उपयोग के बारे में बताती हैं

मोहित ने तुरंत पकड़ा कि पहला व्यंजक,  $2(3 - 8)$  घटाव पर बंटन गुणधर्म का एक उदाहरण था, और उसके अनुसार यह संख्या के किसी भी मान के लिए सही रहेगा। उसने सामान्य रूप को  $a(b - c) = a \times b - a \times c$  के रूप में बताया।

उदाहरण  $2 + 2 = 2 \times 2$  से एक रोचक चर्चा निकली और सूचकांकों के बारे में और इस बारे में कि 'की घात' का क्या अर्थ होता है, कुछ गलतफहमियाँ सामने आईं जब रीमा ने कहा कि ' $= 2^2$ ' को उस समीकरण में जोड़ा जा सकता है। प्रश्न 6 और 7 में छात्र-छात्राओं ने तत्समकों के बारे में सोचा और कुछ इस बात से आश्चर्यचकित थे कि ये सभी संक्रियाओं के लिए समान नहीं थे – अंकगणितीय उदाहरणों के साथ काम करते समय वास्तव में उन्हें इस बारे में पता था लेकिन सामान्यीकृत रूप उपयोग करते समय शायद वे इसे भूल गए!

हालाँकि यह कार्य आजमाकर मैं खुश थी, लेकिन मुझे इस बात का अंदाजा नहीं था कि इससे मुझे छात्र-छात्राओं की इतनी गलतफहमियों का पता चलेगा। मैं अभी भी यह सोच रही हूँ कि इस गतिविधि ने ऐसा क्यों होने दिया। क्या यह चर्चा थी, या 'साधारण' उदाहरण? पाठ्यपुस्तक से अभ्यास करते समय यह इतना क्यों नहीं हुआ? जब मैं कक्षा में अपने छात्र-छात्राओं का मूल्यांकन करने के तरीकों के बारे में सोच रही हूँ, तो मुझे याद रखना चाहिए कि ऐसे कार्यों का उपयोग करना, जो छात्र-छात्राओं को किसी असामान्य लेकिन आवश्यक रूप से कठिन संदर्भ में नहीं, वह लागू करने के लिए कहते हैं, जो उन्हें पता है, मुझे उनके ज्ञान को स्पष्ट रूप से मूल्यांकित करने की सुविधा देता है।



### ज़रा सोचिए

- छात्र-छात्राओं से किस प्रकार की प्रतिक्रिया अपेक्षित थी? क्यों?
- अपने छात्र-छात्राओं की समझ का पता लगाने के लिए आपने क्या सवाल किए?

- आपके अनुसार वह कौन सा कारण है जिससे गलतफहमियाँ बाहर आती हैं, जैसा श्रीमती इन्दु की कक्षा में हुआ?

#### 4 सारांश

इस इकाई में आपसे बीजगणितीय व्यंजकों के साथ लेखन और कार्य करने के बारे में कहा गया है। इस इकाई में आपसे बीजगणितीय व्यंजकों के साथ लेखन और कार्य करने के बारे में कहा गया है। गतिविधियों में ऐसे विचार प्रस्तुत किए गए हैं, जिनका उपयोग वास्तविक दुनिया में जटिल स्थितियों के निदर्शन में व्यापक रूप से किया जाता है और जो निर्णय लेने की सुविधा देते हैं। छात्र-छात्राओं को अपनी पसंद की किसी स्थिति के लिए गणितीय व्यंजक ढूँढकर लाने के लिए कहने से व्यंजकों का उपयोग करने के नीरस अभ्यास से दूर होने में मदद मिलती है और वे यह देखते हैं कि ये चीजें महत्वपूर्ण हैं। कुछ विचारों को अभिव्यक्त करने के लिए व्यंजकों की गणितीय भाषा का उपयोग करना बहुत आसान है, लेकिन इसके संपर्क में छात्र-छात्राएँ बहुत कम ही आते हैं।

अंतिम गतिविधियों में छात्र-छात्राओं को व्यंजकों के बारे में विचारों की चर्चा चिंतामुक्त तरीके से करने को कहा जाता है, ताकि गलतफहमियाँ बाहर लाई जा सकें और उनका समाधान हो सके। सामान्यीकरण पर ध्यान केंद्रित करने – अर्थात्, यह सुनिश्चित करने कि व्यंजकों में समतुल्यता हमेशा सत्य है – से उन्हें बीजगणित में कई अन्य विचारों से प्राकृतिक रूप से जुड़ने में मदद मिली।



#### ज़रा सोचिए

- इस इकाई में आपके द्वारा उपयोग किए गए तीन विचार पहचानें जो अन्य विषयों को पढ़ाने में भी काम करेंगे। उन दो विषयों पर एक नोट बनाएँ जो आपको शीघ्र ही पढ़ाने हैं, जहाँ थोड़े से बदलाव के साथ उन विचारों का उपयोग किया जा सकता है।

#### संसाधन

##### संसाधन 1: एनसीएफ/एनसीएफटीई शिक्षण आवश्यकताएँ

यह इकाई NCF (2005) तथा NCFTE (2009) की निम्न शिक्षण आवश्यकताओं से जोड़ता है तथा उन आवश्यकताओं को पूरा करने में आपकी मदद करेगा:

- छात्र-छात्राओं को उनके सीखने में सक्रिय प्रतिभागी के रूप में देखें न कि सिर्फ ज्ञान प्राप्त करने वाले के रूप में; ज्ञान निर्माण के लिए उनकी क्षमताओं को कैसे प्रोत्साहित करें; रोट करने (रटने) की अधिगम से सीखने को दूर कैसे ले जाएं।
- अधिगम को निजी अनुभवों से अर्थ की खोज के रूप में और ज्ञान निर्माण को विचारात्मक शिक्षण की निरंतर विकास प्रक्रिया के रूप में देखें।
- छात्र-छात्राओं को गणित को किसी ऐसी चीज़ के रूप में लेने दें जिसके बारे में वे बात करें, जिसके द्वारा संवाद करें, जिसकी आपस में चर्चा करें, जिसपर साथ मिलकर कार्य करें।
- विद्यालय के ज्ञान को समुदाय के ज्ञान और विद्यालय के बाहर के जीवन से जोड़ें।

#### अतिरिक्त संसाधन

- A newly developed maths portal by the Karnataka government:  
<http://karnatakaeducation.org.in/KOER/en/index.php/Portal:Mathematics>

- Class X maths study material: [http://www.zietmysore.org/stud\\_mats/X/maths.pdf](http://www.zietmysore.org/stud_mats/X/maths.pdf)
- National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics: <https://www.ncetm.org.uk/>
- National STEM Centre: <http://www.nationalstemcentre.org.uk/>
- OpenLearn: <http://www.open.edu/openlearn/>
- BBC Bitesize: <http://www.bbc.co.uk/bitesize/>
- Khan Academy's math section: <https://www.khanacademy.org/math>
- NRICH: <http://nrich.maths.org/frontpage>
- Mathcelebration: <http://www.mathcelebration.com/>
- Art of Problem Solving's resources page: <http://www.artofproblemsolving.com/Resources/index.php>
- Technology: <http://www.tech-nology.com/worksheets/math/>
- Maths is Fun: <http://www.mathsisfun.com/>
- National Council of Educational Research and Training's textbooks for teaching mathematics and for teacher training of mathematics: <http://www.ncert.nic.in/ncerts/textbook/textbook.htm>
- AMT-01 *Aspects of Teaching Primary School Mathematics*, Block 3 ('Numbers (II)'): <http://www.ignou4ublog.com/2013/06/ignou-amt-01-study-materialbooks.html>
- LMT-01 *Learning Mathematics*, Block 1 ('Approaches to Learning') Block 2 ('Encouraging Learning in the Classroom'), Block 6 ('Thinking Mathematically'): <http://www.ignou4ublog.com/2013/06/ignou-lmt-01-study-materialbooks.html>
- *Learning Curve* and *At Right Angles*, periodicals about mathematics and its teaching: [http://azimpremjifoundation.org/Foundation\\_Publications](http://azimpremjifoundation.org/Foundation_Publications)
- Central Board of Secondary Education's books and support material (also including the *Teachers Manual for Formative Assessment – Mathematics (Class IX)*) – select 'CBSE publications', then 'Books and support material': <http://cbse.nic.in/welcome.htm>

### संदर्भ/संदर्भग्रंथ सूची

- Bell, A. (1986) 'Diagnostic teaching: 2 – Developing conflict-discussion lessons', *Mathematics Teaching*, vol. 116, pp.26–9.
- Bell, A. (1987) 'Diagnostic teaching: 3 – Provoking discussion', *Mathematics Teaching*, vol. 118, pp. 21–3.
- Skemp, R. (1976) 'Relational understanding and instrumental understanding', *Mathematics Teaching*, vol. 77, pp. 20–26.
- Egan, K. (1986) *Teaching as Story Telling: An Alternative Approach to Teaching and Curriculum in the Elementary School*. Chicago, IL: University of Chicago Press.
- National Council of Educational Research and Training (2005) *National Curriculum Framework (NCF)*. New Delhi: NCERT.
- National Council of Educational Research and Training (2009) *National Curriculum Framework for Teacher Education (NCFTE)*. New Delhi: NCERT.
- National Council of Educational Research and Training (2012a) *Mathematics Textbook for Class IX*. New Delhi: NCERT.

National Council of Educational Research and Training (2012b) *Mathematics Textbook for Class X*. New Delhi: NCERT.

Watson, A., Jones, K. and Pratt, D. (2013) *Key Ideas in Teaching Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

<https://www.google.co.in/search?q=images+of+sonepur+mela&biw=1366&bih=625&tbm=isch&imgil=mQr1cfTOfSnknM%253A%253BV5FZlp5YG9OKOM%253Bhttp%25253A%25252F%25252Fcontent.time.com%25252Ftime%25252Fphotogallery%25252F%25252C29307%25252C2099509%25252C00.html&source=iu&pf=m&fir=mQr1cfTOfSnknM%253A%25252F%25252Fwww.webindia123.com%25252Ffestival%25252Fimage%25252Fsonepur1.jpg%3Bhttp%253A%25252F%25252Fwww.webindia123.com%25252Ffestival%25252Fnovem%25252Fsonepur.htm%3B649%3B298>

### अभिस्वीकृतियाँ

तृतीय पक्षों की सामग्रियों और अन्यथा कथित को छोड़कर, यह सामग्री क्रिएटिव कॉमन्स एट्रिब्यूशन-शेयरएलाइक लाइसेंस (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>) के अंतर्गत उपलब्ध कराई गई है। नीचे दी गई सामग्री मालिकाना हक की है तथा इस परियोजना के लिए लाइसेंस के अंतर्गत ही उपयोग की गई है, तथा इसका Creative Commons लाइसेंस से कोई वास्ता नहीं है। इसका अर्थ यह है कि इस सामग्री का उपयोग अननुकूलित रूप से केवल TESS-India परियोजना के भीतर किया जा सकता है और किसी भी बाद के OER संस्करणों में नहीं। इसमें TESS-India, OU और UKAID लोगो का उपयोग भी शामिल है।

इस इकाई में सामग्री को पुनः प्रस्तुत करने की अनुमति के लिए निम्न स्रोतों का कृतज्ञतापूर्ण आभार:

चित्र 1: बाएँ, <http://officespaceinjasola.blogspot.co.uk/2011/02/> से चित्र; दाएँ,

<http://prayfordelhi.blogspot.co.uk/>

से चित्र (Figure 1: left, image from <http://officespaceinjasola.blogspot.co.uk/2011/02/>; right, image from <http://prayfordelhi.blogspot.co.uk/>)

कॉपीराइट के स्वामियों से संपर्क करने का हर प्रयास किया गया है। यदि किसी को अनजाने में अनदेखा कर दिया गया है, तो पहला अवसर मिलते ही प्रकाशकों को आवश्यक व्यवस्थाएं करने में हर्ष होगा।

वीडियो (वीडियो स्टिल्स सहित): भारत-भर के उन शिक्षक प्रशिक्षकों, प्रधानाध्यापकों, शिक्षकों और छात्र-छात्राओं के प्रति आभार प्रकट किया जाता है जिन्होंने उत्पादनों में दि ओपन युनिवर्सिटी के साथ काम किया।