माध्यमिक गणित

ग़लतफहमियों से सीखना: बीजगणितीय व्यंजक

भारत में विद्यालय आधारित समर्थन के माध्यम से शिक्षक शिक्षा

www.TESS-India.edu.in

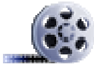
http://creativecommons.org/licenses/

TESS-India (स्कूल-आधारित अनुसमर्थन के द्वारा अध्यापक शिक्षा) का उद्देश्य छात्र-केंद्रित, सहभागी संकल्पना के विकास के लिए शिक्षकों की सहायता के लिए मुक्त शिक्षा संसाधनों (OERs) के माध्यम से भारत में प्रारंभिक और माध्यमिक शिक्षकों की शिक्षण पद्धति में सुधार लाना। TESS-India OERs शिक्षकों को स्कूल की पाठ्यपुस्तक के लिए सहायक पुस्तिका प्रदान करते हैं। वे शिक्षकों के लिए अपनी कक्षाओं में अपने विद्यार्थियों के साथ प्रयोग के लिए गतिविधियाँ प्रदान करते हैं, जिनमें यह दर्शाने वाले वृत्त-अध्ययन भी शामिल रहते हैं कि अन्य शिक्षकों द्वारा उस विषय को कैसे पढ़ाया गया, और उनमें शिक्षकों के लिए पाठ योजनाएँ तैयार करने तथा विषय संबंधी ज्ञान के विकास में सहायक संसाधन भी जुड़े रहते हैं।

TESS-India OER को भारतीय पाठ्यक्रम और संदर्भों के अनुकूल भारतीय तथा अंतर्राष्ट्रीय लेखकों के सहयोग से तैयार किया गया है और ये ऑनलाइन तथा प्रिंट उपयोग के लिए उपलब्ध हैं (http://www.tess-india.edu.in)। OERs भाग लेने वाले प्रत्येक भारतीय राज्य के लिए उपयुक्त, कई संस्करणों में उपलब्ध हैं और उपयोगकर्ताओं को उन्हें अपनाने तथा अपनी स्थानीय ज़रूरतों एवं संदर्भों की पूर्ति के लिए उनका अनुकूलन और स्थानीयकरण करने के लिए आमंत्रित किया जाता है।

TESS-India मुक्त विश्वविद्यालय, ब्रिटेन के नेतृत्व में तथा ब्रिटेन की सरकार द्वारा वित्त-पोषित है।

वीडियो संसाधन

इस इकाई में कुछ गतिविधियों के साथ निम्नलिखित आइकॉन दिया गया है: . यह दर्शाता है कि आपको विशिष्ट शैक्षणिक थीम के लिए TESS-India के वीडियो संसाधनों को देखने में इससे मदद मिलेगी।

TESS-India के वीडियो संसाधन भारत में विभिन्न प्रकार की कक्षाओं के संदर्भ में प्रमुख शैक्षणिक तकनीकों का सचित्र वर्णन करते हैं। हमें उम्मीद है कि वे आपको इसी तरह के अभ्यासों के साथ प्रयोग करने के लिए प्रेरित करेंगे। इन्हें पाठ-आधारित इकाइयों के माध्यम से आपके कार्य अनुभव में इज़ाफ़ा करने और बढ़ाने के लिए रखा गया है, लेकिन अगर आप उन तक पहुँच बनाने में असमर्थ रहते हैं तो बता दें कि वे उनके साथ एकीकृत नहीं हैं।

TESS-India के वीडियो संसाधनों को TESS-India की वेबसाइट http://www.tess-india.edu.in/ पर ऑनलाइन देखा सकता है या डाउनलोड किया जा सकता है)। विकल्प के तौर पर, आप इन वीडियो तक सीडी या मेमोरी कार्ड पर भी पहुँच बना सकते हैं।

संस्करण 2.0 SM11v1
Uttar Pradesh

तृतीय पक्षों की सामग्रियों और अन्यथा कथित को छोड़कर, यह सामग्री क्रिएटिव कॉमन्स एट्रिब्यूशन-शेयरएलाइक लाइसेंस के अंतर्गत उपलब्ध कराई गई है: http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/
TESS-India is led by The Open University UK and funded by UK aid from the UK government

यह इकाई किस बारे में है

बीजगणितीय व्यंजक गणितीय कथन होते हैं, जैसे 3x + 4। उनमें बराबर (=) का चिह्न नहीं होता, जो उन्हें बीजगणितीय समीकरणों से अलग बनाता है। बीजगणितीय व्यंजक गणितीय पाठ्यचर्या और सामान्य गणित में एक महत्वपूर्ण भूमिका अदा करते हैं। गणित में आगे बढ़ने और अच्छा करने के लिए, विद्यार्थियों को व्यंजक पढ़ने और लिखने में समर्थ होना चाहिए, और बीजगणितीय व्यंजकों की गणना और प्रयोग में कुशल होना चाहिए।

कई विद्यार्थियों के लिए बीजगणितीय व्यंजकों को सीखने में समस्या यह है कि उनके लिए यह काम केवल याद रखना और एल्गोरिथम का अनुसरण करना होता है। व्यापकता व्यक्त करने, चरों और स्थिरांकों के बीच संबंधों की व्याख्या करने, और खेल–खेल में और रचनात्मक तरीके से संभावना ढूँढने की बीजगणित की शक्ति और सुंदरता अक्सर खो जाती है। बीजगणित और इसके व्यंजकों को गणित की भाषा समझा जाता है, और उनका उपयोग लोगों, विचारों, तत्वों और संरचनाओं के बीच संबंधों की व्याख्या करने के लिए उपयोग किया जाता है। विद्यार्थी स्कूल में अक्सर अपनी शिक्षा में इसका अनुभव नहीं करते और इसलिए परीक्षा उत्तीर्ण करने के सिवा उन्हें बीजगणितीय व्यंजकों की शिक्षा का उद्देश्य और वास्तविक जीवन से उनका संबंध दिखाई नहीं दे सकता।

इस इकाई में विद्यार्थियों को बीजगणितीय व्यंजकों के उद्देश्य को जानने में मदद करने के लिए संदर्भों का उपयोग और विकास करके बीजगणितीय व्यंजक सिखाने के कुछ विभिन्न तरीकों के बारे में बात की जाएगी। सबसे पहले इसमें वास्तविक जीवन के संदर्भ में चरों और स्थिरांकों की भूमिका का अन्वेषण किया जाएगा; फिर इसमें प्रतिस्थापन की शक्ति पर और इस बात पर नज़र डाली जाएगी कि यह किस प्रकार से रचनात्मक रूप से चिंतन और गलतफहमियों (misconceptions) से शिक्षण को बढ़ा सकता है।

विचार के लिए रुकें

- अपनी कक्षा के बारे में सोचें। बीजगणितीय व्यंजकों के बारे में सीखते समय आपको अपने विद्यार्थियों में क्या समस्याएँ लगती हैं? आपको यह किस बारे में लगती है? वे किसे नापसंद करते हैं? आपके अनुसार वे क्या अलग चाहते हैं?
- फिर उस समय के बारे में सोचें जब आप विद्यालय में बीजगणितीय व्यंजक सीखते थे – आपने क्या महसूस किया? इसमें आपने क्या पसंद किया? इसमें आपने क्या नापसंद किया? आप क्या अलग चाहते थे?

आप इस इकाई में क्या सीख सकते हैं

- चर और स्थिरांकों के बीच संबंधों की पहचान करने में किस प्रकार विद्यार्थियों की मदद करें।
- बीजगणितीय अभिव्यक्तियों में प्रयोजन देखने में विद्यार्थियों की मदद के लिए संदर्भों का उपयोग करने और उन्हें विकसित करने पर कुछ विचार।
- ग़लतफहमियों (misconceptions) को जानने और उनका शिक्षण साधन के रूप में उपयोग करने पर कुछ विचार।

इस इकाई का संबंध संसाधन 1 में दर्शाई गई NCF (2005) और NCFTE (2009) शिक्षण आवश्यकताओं से है।

1 वास्तविक जीवन के संदर्भ में चर और स्थिरांक

दिल्ली का नेहरू प्लेस, जो कंप्यूटर और पेरीफ़ेरल का एशिया का सबसे बड़ा बाजार है, हमेशा भीड़ से भरा रहता है। कामकाज के समय यहाँ अत्यंत गतिशील वातावरण रहता है। सुबह से लेकर शाम तक जितनी तेजी से यहाँ वातावरण बदलता है, उससे एक हॉकर से लेकर कार पार्किंग या दुकान में कर्मचारियों की संख्या तक सभी कुछ प्रभावित होता है (चित्र 1)। वातावरण में इस बदलाव को गतिकी कहा जाता है।

चित्र 1 वास्तविक जीवन में गतिकी: नेहरू प्लेस, दिल्ली, शांत (बाएँ) और व्यस्त (दाएँ)।

व्यावसायिक (professional) गणितज्ञ इस गतिकी का अनुमान लगाने और उनकी व्याख्या करने के मॉडल विकसित करते हैं। ऐसा करके वे शहरी योजनाकारों, स्थानीय नीति निर्माताओं और कानून प्रवर्तन विभागों को यह अनुमान लगाने में सक्षम बनाता है कि श्रम, प्रावधानों, सहायता संरचना आदि के संबंध में विभिन्न समय पर क्या आवश्यक हो सकता है।

यह गणितीय प्रतिरुपण इस निर्णय पर आधारित है कि समान व्यवस्था में चर (संख्यात्मक मात्राएँ जो अलग–अलग होंगी) और स्थिरांक (मात्राएँ जो समान रहेंगी) क्या हैं। गतिविधि 1 में शहर के जीवन के एक उदाहरण का उपयोग करके इसे आपके विद्यार्थियों को पढ़ाने के तरीका बताया गया है। (यदि आपके विद्यार्थी नेहरू प्लेस या ऐसे किसी वातावरण से अपरिचित हैं, तो आपको इस उदाहरण में उनका जाना–पहचाना संदर्भ उपयोग करना चाहिए।) अगले चरण में यह तय किया जाएगा कि कौन से चर संबंधित हैं और किस तरह से, और गतिविधि 2 में यह बताया गया है कि इसे अपने विद्यार्थियों के साथ कैसे करें।

गतिविधियों 1 और 2 में, आप और आपके विद्यार्थी सोचेंगे कि किसी मॉडल का सरल संस्करण कैसे बनाया जाए; ध्यान दें कि एक ही सही या गलत उत्तर नहीं है। ये कार्य विशेष रूप से उन विद्यार्थियों के लिए बेहतर काम करते हैं, जो युग्म या छोटे समूहों में काम करते हैं, क्योंकि इससे अधिक विचार तैयार होते हैं और अटकने पर विद्यार्थी मानवीय सहायता प्रदान कर सकते हैं।

इस यूनिट में अपने विद्यार्थियों के साथ गतिविधियों के उपयोग का प्रयास करने के पहले अच्छा होगा कि आप सभी गतिविधियों को पूरी तरह (या आंशिक रूप से) स्वयं करके देखें। यह और भी बेहतर होगा यदि आप इसका प्रयास अपने किसी सहकर्मी के साथ करें क्योंकि जब आप अनुभव पर विचार करेंगे तो आपको मदद मिलेगी। स्वयं प्रयास करने से आपको शिक्षार्थी के अनुभवों के भीतर झांकने का मौका मिलेगा, जो परोक्ष रूप से आपके शिक्षण और एक शिक्षक के रूप में आपके अनुभवों को प्रभावित करेगा। जब आप तैयार हों, तो अपने विद्यार्थियों के साथ गतिविधियों का उपयोग करें। पाठ के बाद, सोचें कि गतिविधि किस तरह हुई और उससे क्या सीख मिली। इससे आपको सीखने वाले विद्यार्थियों पर ध्यान केंद्रित रखने वाला अधिक शैक्षिक वातावरण बनाने में मदद मिलेगी।

गतिविधि 1: स्थिरांक और चरों को पहचानना

- अपने विद्यार्थियों को निम्न बताएँ:
- कल्पना करें कि आप एक व्यावसायिक (professional) गणितज्ञ हैं और आप दिल्ली में नेहरू प्लेस की गतिकी की व्याख्या के लिए एक गणितीय मॉडल तैयार करने पर काम कर रहे हैं। आपको पहले नेहरू प्लेस में भूमिका अदा करने वाले सभी चर (बदलने वाली मात्राएँ) और स्थिरांक (न बदलने वाली मात्राएँ) पहचानने होंगे।
- इस व्यवस्था में सभी ‘खिलाड़ियों’ या ‘तत्वों’ की सूची बना लें। कुछ उदाहरण पहले तल पर कार पार्किंग, हॉकर या दुकानों की संख्या हो सकते हैं।
- जब आपके विद्यार्थी कुछ विचार तैयार कर लें, तो बोर्ड पर नीचे सूची में लिख लें:

कितनी संख्या में है।

i. कॉम्पलेक्स की सुरक्षा में नियुक्त पुलिस विभाग में काम करने वाले पुरुष और महिलाएँ

ii. कार पार्किंग

iii. कॉम्पलेक्स के नागरिक रखरखाव में नगर निगम द्वारा नियुक्त लोग

iv. पार्किंग लॉट कर्मी

v. हॉकर

vi. एस्केलेटर

vii. दुकान स्वामी जिनकी दुकान प्रथम तल पर है

viii. तल पर मौजूद रेस्टोरेंट स्वामी

ix. बिजली आपूर्ति कंपनियाँ

x. लैपटॉप खरीदना चाहने वाले आगंतुक।

xi. अब अपने विद्यार्थियों को बताएँ:

xii. इस सूची में इस संदर्भ में ‘खिलाड़ियों’ या ‘तत्वों’ के कुछ और उदाहरण दिए गए हैं। इस सूची और अपने उदाहरणों के बीच, तय करें कि कौन से चर (बदलने वाली मात्रा) हैं और कौन से स्थिरांक (न बदलने वाली मात्रा) हैं। क्या इनमें से कोई दोनों होगा? यदि ऐसा है, तो यह किसपर निर्भर करेगा?

गतिविधि 1 में विद्यार्थियों से नेहरू प्लेस में चरों और स्थिरांकों को पहचानने के लिए कहा गया। गणितीय मॉडल बनाने के लिए, अब विद्यार्थियों को सोचना होगा कि किस प्रकार ये स्थिरांक और चर एक–दूसरे को कैसे प्रभावित करते हैं और उनसे कैसे संबंधित हैं।

गतिविधि में विद्यार्थियों को दिमागी नक्शा बनाने को कहा जाता है। दिमागी नक्शा आमतौर पर अवधारणा (नोड के रूप में) को दर्शाने वाली शब्दों या वाक्यांशों की एक श्रृंखला, और एक रेखा (या लिंक) जो इसे अन्य अवधारणा से जोड़ती है, जो दोनों का संबंध व्यक्त करता है। अवधारणा नक्शा दिमागी नक्शे के समान होता है, बस यह अंतर होता है कि दिमागी नक्शे में एक केंद्र होता है, जबकि अवधारणा नक्शा रैखिक हो सकता है।

दिमागी नक्शा एक अच्छा औजार है और विद्यार्थियों की उनकी समझ का अन्वेषण करने और समीक्षा करने में उनकी मदद करने की एक प्रभावी रणनीति है; इसे यह पता करने के लिए एक मूल्यांकन औजार के रूप में भी उपयोग किया जा सकता है कि विद्यार्थी क्या जानते हैं और उनकी गलतफहमियाँ क्या हैं। गतिविधि 2 में कोई सही या गलत उत्तर
नहीं हैं।

गतिविधि 2: बीजगणितीय व्यंजकों का विकास

- अपने विद्यार्थियों के साथ, कल्पना करें कि आप एक व्यावसायिक (professional) गणितज्ञ हैं और आप दिल्ली में नेहरू प्लेस की गतिकी की व्याख्या के लिए एक गणितीय मॉडल तैयार करने पर काम कर रहे हैं। आपने अपने चर (बदलने वाली मात्रा) और स्थिरांक (न बदलने वाली मात्रा) को पहले ही पहचान लिया है जो नेहरू प्लेस में भूमिका अदा करते हैं।
- अगला चरण यह पहचानना है कि किस प्रकार चर एक–दूसरे से और स्थिरांकों से किस प्रकार संबंधित हैं। इसे प्रबंधित करने योग्य रखने के लिए, विद्यार्थियों के प्रत्येक समूह को यह तय करना चाहिए कि किन चार चरों पर वह ध्यान देंगे। अब अपने विद्यार्थियों को यह बताएँ:
- इन चरों का दिमागी नक्शा बनाएँ और इन विचारों को जोड़ते हुए पंक्तियाँ लिखें कि आपके अनुसार वे कैसे संबंधित हो सकते हैं। दिमागी नक्शे में कुछ स्थिरांक जोड़ें, यदि आप समझते हैं कि वे संबंध में एक भूमिका निभाते हैं। याद रखें कि इसके लिए कोई सही या गलत जवाब नहीं है! उदाहरण के लिए, आप यह सोच सकते हैं कि इस बात को ध्यान में रखते हुए पुलिस अधिकारियों की संख्या बदलनी चाहिए कि किसी समय पर कितने आगंतुक (खरीदार) मौजूद हैं, या दुकानों या कारों की संख्या के आधार पर।
- अब तय करें कि आपके समूह द्वारा ऊपर बताए संबंधों में आप किन परिमाणकों का उपयोग करेंगे। इसे गणितीय व्यंजक के रूप में लिखें। उदाहरण के लिए, आप यह कह सकते हैं कि आपको हर दस दुकानों 100 आगंतुकों या 50 कारों के लिए एक पुलिस अधिकारी लगेगा; इस स्थिति में आप पुलिस अधिकारियों की संख्या के मॉडल को इस प्रकार लिख सकते हैं: $s/10 + v/100 + c/50$। याद रखें कि कोई सही या गलत जवाब नहीं है!
- जब विद्यार्थी कुछ गणितीय व्यंजक तैयार कर लें, तो उन्हें उनकी मॉडलिंग के लिए कुछ संभावित परिणाम सोचने के लिए कहें। उन्हें यह करने को कहें:
- इन चरों के लिए मानों की श्रेणी का अनुमान लगाएँ। जिन स्थितियों में आपको श्रेणी का अनुमान लगाने में परेशानी आए, परेशानी के कारणों को पहचानें। उदाहरण के लिए, एस्केलेटर की संख्या एक से कम नहीं हो सकती, क्योंकि आपके पास आधा एस्केलेटर नहीं हो सकता। आपके पास अनंत एस्केलेटर भी नहीं हो सकते, क्योंकि वे अत्यधिक स्थान लेते हैं। एस्केलेटर की अधिकतम संख्या का अनुमान लगाना कठिन है,, क्योंकि यह कई कारणों पर निर्भर करेगा।
- तय करें कि किन चरों को आप आसानी से नियंत्रित कर सकते हैं? किसी चर को नियंत्रित करने का अर्थ यह हो सकता है कि इसकी श्रेणी को सीमित किया जा सकता है या यह कि इसके मान को स्थिति को बहुत प्रभावित किए बिना स्थिर किया जा सकता है।
- गतिविधि के अंत में, पूरी कक्षा को इस बिंदु के बारे में चर्चा करने को कहें: वास्तव में, मॉडलिंग में उपयोग किए जाने वाले परिमाणक आँकड़ों पर आधारित होंगे। यदि आपको इसे संगठित करना होता, तो आप किस प्रकार सूचना एकत्रित कर पाते?

केस स्टडी 1: श्रीमती अपराजिता गतिविधि 1 के बारे में अपने अनुभव बताती हैं

यह एक अध्यापिका की कहानी है, जिसने अपने माध्यमिक कक्षा के विद्यार्थियों के साथ गतिविधि 1 और 2 को आजमाया।

- मैं यह गतिविधियाँ अपने विद्यार्थियों के साथ करना चाहती थी, क्योंकि मैंने सोचा कि गणित को वास्तविक जीवन में देखने और संगठित करने का यह एक सुंदर उदाहरण था। पहले हमने पूरी कक्षा के साथ कुछ उदाहरण सोचे। मैंने सीधे उनसे इन्हें चरों और स्थिरांकों में अलग–अलग करने को कहा। इस प्रारंभिक चर्चा ने उन्हें सजग कराया कि यह निर्धारित करना हमेशा आसान नहीं होता। उदाहरण के लिए कार पार्किंग की संख्या को स्थिरांक माना जा सकता है; हालाँकि, यदि आपने लंबे समय से परिस्थिति को देखा है – उदाहरण के लिए दो वर्षों से – तो यह चर बन सकता है, क्योंकि सैद्धांतिक रूप से, यदि स्थान और पैसा होता तो अधिक कार पार्किंग बनाई जा सकती थीं।
- अधिक उदाहरण ढूँढने और यह कारण सोचने के लिए उन्होंने युग्मों में काम किया कि कब व क्यों उदाहरण चर था और कब स्थिरांक। उनके उदाहरणों और वर्गीकरणों को ब्लैकबोर्ड पर लिखा गया। इनका उपयोग फिर गतिविधि 2 पर कार्य करने के लिए किया गया: इस बारे में सोचना कि वे एक–दूसरे से कैसे संबंधित हैं और इसे व्यंजकों के रूप में लिखकर और गुणांकों का निर्णय करके गणितीय रूप में रिकॉर्ड कैसे करें। एक विद्यार्थी ने कहा कि उसने किसी अनुपात को प्रदर्शित करने के लिए गुणांकों पर कभी विचार नहीं किया और यह कि अब उसे अचानक यह समझ आ गया कि व्यंजकों के साथ काम करते समय ये नियम क्यों होते हैं।
- पहली बार, विद्यार्थियों को यह विचार असहज लगा कि इसमें कोई भी सही या गलत उत्तर नहीं हो सकता। हालाँकि, समान चरों और स्थिरांकों वाले संभावित व्यंजकों के बारे में कुछ विचार साझा करने के बाद, वे यह देख पाए कि यह ऐसा क्यों था और वे अपने उत्तरों में अधिक रचनात्मक बने।

- चूँकि मैं वास्तव में इन गतिविधियों द्वारा विद्यार्थियों को यह बताना चाहती थी कि वास्तविक जीवन में गणित को कैसे देखा और पहचाना जा सकता है, इसलिए मैंने गृहकार्य में उन्हें रात में उनके सामने आने वाली किसी स्थिति के साथ यही बात करने को कहा। उदाहरण के लिए, बस स्टॉप पर प्रतीक्षा करते समय, परिजनों के साथ भोजन करते समय या अपना गृहकार्य करते समय चरों और स्थिरांकों को पहचानना और यह देखना कि वे एक–दूसरे से कैसे संबंधित हैं।

आपके शिक्षण अभ्यास के बारे में सोचना

अपनी कक्षा के साथ ऐसा कोई अभ्यास करने पर बाद यह सोचें कि क्या ठीक रहा और कहाँ गड़बड़ी हुई। ऐसे सवाल की ओर ध्यान दें, जिसमें विद्यार्थियों की रुचि दिखाई दे और वे आगे बढ़ते हुए नजर आएं और वे जिनका स्पष्टीकरण करने की आवश्यकता हो। ऐसे चिंतन से वह 'स्क्रिप्ट' मिल जाती है, जिसकी मदद से आप विद्यार्थियों के मन में गणित के प्रति रुचि जगा सकते हैं और उसे मनोरंजक बना सकते हैं। अगर विद्यार्थियों को समझ नहीं आ रहा है और वे कुछ नहीं कर पा रहे हैं, तो इसका मतलब है कि उनकी इसमें सम्मिलित होने की रुचि नहीं है। जब भी आप गतिविधियां करें, इस चिंतनशील अभ्यास का उपयोग करें यह ध्यान देते हुए, जैसे श्रीमती अपराजिता ने किया, कि कुछ छोटी–छोटी चीजों से काफी फर्क पड़ता है।

विचार के लिए रुकें

- निम्न चिंतन को बढ़ावा देने वाले अच्छे प्रश्न हैं:

- आपकी कक्षा कैसी रही? क्या सभी विद्यार्थियों ने भाग लिया?
- विद्यार्थियों से किस प्रकार की प्रतिक्रिया अनपेक्षित थी? क्यों?
- अपने विद्यार्थियों की समझ का पता लगाने के लिए आपने क्या सवाल किए?
- क्या किसी भी समय आपको ऐसा लगा कि हस्तक्षेप करना चाहिए?
- किन बिंदुओं पर आपको लगा कि आपको और समझाना होगा?
- क्या आपने कार्य में किसी भी तरीके का संशोधन किया? अगर हाँ, तो इसके पीछे आपका क्या कारण था?

2 संभावनाओं के बारे में सोचने के लिए प्रतिस्थापन का उपयोग करना

प्रतिस्थापन एक सशक्त और आवश्यक चिंतन औजार है। वास्तविक जीवन में, प्रतिस्थापन का उपयोग निरंतर होता है: उदाहरण के लिए, कल के भोजन से अलग तरह का भोजन बनाने के लिए यह तय करना कि आज के भोजन में कौन सी जड़ी बूटी और मसाले उपयोग किए जाएँ; परिवहन का कौन सा साधन उपयोग करें (क्या आप पैदल चलेंगे, या रिक्शा या बस लेंगे?), या कौन सी साड़ी पहनें। प्रतिस्थापन में संभावनाओं और विकल्पों के साथ–साथ सीमाओं पर भी विचार करना शामिल है। उदाहरण के लिए, अपनी ड्रेस बदलते समय रेशमी साड़ी को कैल्क्यूलेटर से बदलना बहुत ठीक नहीं होगा, लेकिन इस बात के लिए ठीक हो सकता है कि आप अपने पैसे कहाँ खर्च करेंगे। प्रतिस्थापन इसलिए आनन्ददायक जीवन हेतु परिवर्तन की सुविधा देता है।

गणित में प्रतिस्थापन की चितंन प्रक्रिया वास्तविक जीवन के ही समान है। इसमें उदाहरणों, विकल्पों और संभावनाओं पर विचार करने के साथ–साथ सीमाओं और प्रतिबंधों से अवगत रहना शामिल है।

विचार के लिए रुकें

- आपके अनुसार गणितीय प्रतिस्थापन वास्तविक जीवन के प्रतिस्थापन से किस प्रकार समान या अलग है?
- आप प्रतिस्थापन पर कार्य कर रही कक्षा के साथ समय क्यों बिताएँगे?

प्रतिस्थापन के साथ काम करते समय शिक्षण के अवसर

गणित में अपने अध्ययन के लिए विद्यार्थियों को प्रतिस्थापन का कौशल सीखना होगा – अभ्यास पुस्तक के कई अभ्यास और समस्याओं में विद्यार्थियों को यह कौशल दिखाने को कहा जाता है।

विद्यार्थियों को प्रतिस्थापन वाले सवाल हल करने के लिए देने से गणित सीखने के वे अन्य अवसर भी प्राप्त होते हैं, जो बहुत स्पष्ट नहीं होते, लेकिन जो समान महत्वपूर्ण और लाभप्रद होते हैं। इनमें से कुछ, जिन पर आगे खोजबीन होगी।

- किसी बीजगणितीय व्यंजक का मतलब समझने के लिए कहानियाँ बनाकर गणितीय व्यंजकों को जीवंत बनाने के लिए प्रतिस्थापन एक औजार है। गतिविधि 3 इसका एक उदाहरण है।
- प्रतिस्थापन किसी विशिष्ट संख्यात्मक उदाहरण को व्यापक बनाने का एक औजार है। गतिविधि 4 इसका एक उदाहरण है।
- गणितीय संबंध, गुणधर्म और सीमाएँ पता करने के लिए प्रतिस्थापन। गतिविधि 4 में इसके कुछ उदाहरण हैं।

कल्पनाशीलता के विकास के लिए प्रतिस्थापन का उपयोग करना।

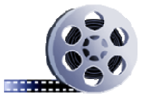
बीजगणित और इसके व्यंजकों को अक्सर गणित की भाषा माना जाता है, क्योंकि वे संबंध बताते हैं। बीजगणितीय व्यंजकों में फेरबदल पर पाठ्यपुस्तक से कई पृष्ठ का अभ्यास करते समय, विद्यार्थियों को इसे भावपूर्ण भाषा के रूप में न पहचानने के लिए माफ किया जा सकता है।

अगली गतिविधि का लक्ष्य बीजगणितीय व्यंजकों को पढ़ने में कुछ आनंद प्रस्तुत करना है। इसमें विद्यार्थियों को इस बारे में अपनी स्वयं की कहानियाँ बताने के लिए कहा जाता है कि व्यंजक का क्या अर्थ होता है और यह कौन सी स्थिति बताता है। इसका अर्थ है कि प्रतीकों को किसी वर्णन या कहानी से प्रतिस्थापित करके विद्यार्थियों को प्रतीकात्मक गणित को अर्थ देने को कहा जाता है। उदाहरण के लिए:

- व्यंजक $\frac{x}{n} + 3$ लोगों के किसी समूह (x) के बारे में हो सकता है, जो समान संख्या में कई बसों (n) में सवार हुए। कुछ लोग देर से आए और हर बस को अन्य तीन लोगों को बैठाना पड़ा।
- व्यंजक 1.3(2100m), व्यंजक 1.3 [3(700)m] से आया हो सकता है और उन 700 अंतरिक्ष एलियन के बारे में हैं, जो उदयपुर में उतरे हैं। वे पहली बार भारत आए हैं। उन्होंने देखा कि यहाँ चाय नाम का एक पेय लोगों को बहुत पसंद है , जो 1 रु. प्रति कप मिलता है। उन्होंने चाय पी जो उन्हें इतनी पसंद आई कि हर एक ने तीन–तीन कप पी। वे चाय की गुणवत्ता और चायवाले की सेवा से इतने खुश हुए कि पैसे देते समय उन्होंने 30 प्रतिशत टिप दी।

गतिविधि 3: इसका क्या मतलब हो सकता है।

- अपने विद्यार्थियों को निम्न बताएँ।
- यहाँ पर पाठ्यपुस्तक से लिए गए कुछ बीजगणितीय व्यंजक दिए गए हैं:
- 30u + 44v
- 3x +1
- $3\sqrt{4}$
- $\frac{18(3x+1)}{6}$
- $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
- अपनी कल्पनाशीलता का उपयोग करें और एक कहानी बनाएँ कि हर व्यंजक का क्या मतलब हो सकता है। व्यंजक किस स्थिति को दिखा रहा हो सकता है? यह और किस बारे में हो सकता है?



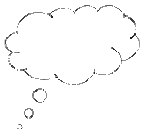
वीडियो: कहानी सुनाना, गीत, रोल–प्ले और नाटक

आप मुख्य संसाधन 'कहानी कहना, गीत, रोल–प्ले और नाटक' पर भी एक नजर डालना चाह सकते हैं।

केस स्टडी 2: गतिविधि 3 के उपयोग का अनुभव श्रीमती कपूर बताती हैं

- किसी व्यंजक को फिट करने के लिए किसी वास्तविक कहानी के बारे में सोचना मुझे खुद भी आसान नहीं लगा। लेकिन मैंने पाया कि बस में सवार लोगों और अत्यधिक चाय पीने वाले एलियन के बारे में दिए गए उदाहरणों ने मेरी वास्तव में मदद की और अन्य उदाहरण सोचने के लिए मुझे अधिक स्वतंत्रता और रचनात्मक रूप से सोचने का अवसर दिया। मैंने यह तय किया कि चूँकि इसने मेरे लिए बहुत अच्छा काम किया, मैं इसे आगे बढ़ाकर अपने विद्यार्थियों के साथ इसी तरीके का उपयोग करूँगी। इसलिए मैंने ब्लैकबोर्ड पर बस और एलियन की कहानियों के बारे में लिखते हुए गतिविधि की शुरुआत की, उन्हें कहानी के बारे में सोचने को कुछ समय (बहुत ज्यादा नहीं) दिया और फिर कक्षा के साथ साझा किया।

- फिर मैंने गतिविधि 3 के व्यंजकों को ब्लैकबोर्ड पर लिखा। राहुल ने तुरंत सोचा कि व्यंजक 3x + 1 इस बारे में कहानी बता सकता है कि तीन कप चाय बनाने की लागत क्या होगी: पानी और चाय के लिए x रुपए, और किसी चीज़ के लिए 1 रुपए स्थिर लागत। कुछ विद्यार्थी सहमत हुए और कुछ नहीं, लेकिन बाद में हुई चर्चा रोचक थी। इससे मुझे महसूस हुआ कि चर्चा शुरू करने के लिए एकदम सही उत्तरों के बजाय थोड़े गलत उदाहरण के साथ काम करना ज्यादा प्रभावी होता है।



विचार के लिए रुकें

- अपने विद्यार्थियों की समझ का पता लगाने के लिए आपने क्या सवाल किए?
- क्या आपने श्रीमती कपूर की तरह कार्य को किसी तरह बदला था? अगर हाँ, तो इसके पीछे आपका क्या कारण था?

3 गलतफहमियाँ पता करने के लिए सामान्यीकरण का उपयोग करना

जब आपको 2(3 – 8) जैसे व्यंजक दिखाई दें, तो आप तुरंत देख सकते हैं कि इसे (2 × 3) – (2 × 8) के रूप में फिर से लिखा जा सकता है क्योंकि यह बंटन के नियम का एक उदाहरण है जहाँ a(b – c) = a × b – a × c है।

ऐसे पैटर्न और सामान्यीकरण का पता लगाना गणित में मददगार होता है क्योंकि इससे समस्याओं का समाधान करना आसान हो जाता है। नकारात्मक पक्ष यह है कि कभी–कभी आपको कुछ पैटर्न दिखाई देगा और इसलिए आप इसे सामान्यीकृत कर देंगे, जबकि वास्तव में यह एक विशेष स्थिति है और केवल कुछ ही परिस्थितियों में सही होगी। अगली गतिविधि आपको संख्यात्मक व्यंजकों से सामान्यीकृत बीजगणित लिखने के कुछ उदाहरण देती है।

गतिविधि 4: विशिष्ट को सामान्यीकृत रूप से प्रतिस्थापित करना

- अपने विद्यार्थियों को निम्न बताएँ:
- नीचे वे व्यंजक और समीकरण दिए गए हैं जो बीजगणितीय व्यंजकों और समीकरणों द्वारा अपनाए जा सकने वाले सामान्यीकृत रूप के उदाहरण हैं। इनमें से कुछ समीकरण हैं, न कि केवल व्यंजक – सुनिश्चित करें कि आपको अंतर पता हैं।

1. 2 (3 – 8)
2. 12 + (13 + 81) = (12 + 13) + 81
3. 2 + 2 = 2 × 2
4. $1/(\frac{1}{4}) = 4$
5. (–7) = 7
6. 42 + 0 = 42
7. 23 × 1 = 23
8. 120 का 5 प्रतिशत
9. (12 + 51)/(12 × 51)
10. 2 + 3 = 3 + 2
11. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6}$

- इनके लिए सामान्य बीजगणितीय व्यंजक या समीकरण लिखें। उनमें से कुछ के एक से अधिक हल हैं, इसलिए खोजी बनें!
- क्या ये हमेशा सत्य होंगे? क्या आप यह कह सकते हैं कि वे किसी भी संख्या के लिए मान्य होंगे?

वीडियो: निगरानी करना और फीडबैक देना

आप मुख्य संसाधन 'निगरानी करना और फीडबैक देना' पर भी एक नजर डाल सकते हैं।

केस स्टडी 3: श्रीमती अग्रवाल गतिविधि 4 के उपयोग के बारे में बताती हैं

मोहित ने तुरंत पकड़ा कि पहला व्यंजक, 2 (3 – 8) घटाव पर बंटन गुणधर्म का एक उदाहरण था, और उसके अनुसार यह संख्या के किसी भी मान के लिए सही रहेगा। उसने सामान्य रूप को a(b – c) = a × b – a × c के रूप में बताया।

उदाहरण 2 + 2 = 2 × 2 से एक रोचक चर्चा निकली और सूचकांकों के बारे में और इस बारे में कि 'की घात' का क्या अर्थ होता है, कुछ गलतफहमियाँ सामने आई जब रीमा ने कहा कि '= 2^2' को उस समीकरण में जोड़ा जा सकता है। प्रश्न 6 और 7 में विद्यार्थियों ने सर्वसमिका के बारे में सोचा और कुछ इस बात से आश्चर्यचकित थे कि ये सभी संक्रियाओं के लिए समान नहीं थे – अंतगणितीय उदाहरणों के साथ काम करते समय वास्तव में उन्हें इस बारे में पता था लेकिन सामान्यीकृत रूप उपयोग करते समय शायद वे इसे भूल गए!

- हालाँकि यह कार्य आजमाकर मैं खुश थी, लेकिन मुझे इस बात का अंदाजा नहीं था कि इससे मुझे विद्यार्थियों की इतनी गलतफहमियों का पता चलेगा। मैं अभी भी यह सोच रही हूँ कि इस गतिविधि ने ऐसा क्यों होने दिया। क्या यह चर्चा थी, या 'साधारण' उदाहरण? पाठ्यपुस्तक से अभ्यास करते समय यह इतना क्यों नहीं हुआ? जब मैं कक्षा में अपने विद्यार्थियों का मूल्यांकन करने के तरीकों के बारे

> में सोचती हूँ, तो मुझे याद रखना चाहिए, कि ऐसे कार्यों का उपयोग करना, जो विद्यार्थियों को किसी असामान्य लेकिन आवश्यक रूप से कठिन संदर्भ में नहीं हैं और लागू करने के लिए कहते हैं, जो उन्हें पता है, तो मुझे उनके ज्ञान को स्पष्ट रूप से मूल्यांकित करने की सुविधा देती है।

विचार के लिए रुकें

- विद्यार्थियों से किस प्रकार की प्रतिक्रिया अनपेक्षित थी? क्यों?
- अपने विद्यार्थियों की समझ का पता लगाने के लिए आपने क्या सवाल किए?
- आपके अनुसार वह कौन सा कारण है जिससे गलतफहमियाँ बाहर आती हैं, जैसा श्रीमती अग्रवाल की कक्षा में हुआ?

4 सारांश

इस इकाई में आपसे बीजगणितीय व्यंजकों के साथ लेखन और कार्य करने के बारे में कहा गया है। गतिविधियों में ऐसे विचार प्रस्तुत किए गए हैं, जिनका उपयोग वास्तविक दुनिया में जटिल स्थितियों के प्रतिरूपण में व्यापक रूप से किया जाता है और जो निर्णय लेने की सुविधा देते हैं। विद्यार्थियों को अपनी पसंद की किसी स्थिति के लिए गणितीय व्यंजक ढूँढकर लाने के लिए कहने से व्यंजकों का उपयोग करने के नीरस अभ्यास से दूर होने में मदद मिलती है और वे यह देखते हैं कि ये चीजें महत्वपूर्ण हैं। कुछ विचारों को अभिव्यक्त करने के लिए व्यंजकों की गणितीय भाषा का उपयोग करना बहुत आसान है, लेकिन इसके संपर्क में विद्यार्थी बहुत कम ही आते हैं।

अंतिम गतिविधियों में विद्यार्थियों को व्यंजकों के बारे में विचारों की चर्चा चिंतामुक्त तरीके से करने को कहा जाता है, ताकि गलतफहमियाँ बाहर लाई जा सकें और उनका समाधान हो सके। सामान्यीकरण पर ध्यान केंद्रित करने – अर्थात, यह सुनिश्चित करने कि व्यंजकों में समतुल्यता हमेशा सत्य है – से उन्हें बीजगणित में कई अन्य विचारों से प्राकृतिक रूप से जुड़ने में मदद मिली।

विचार के लिए रुकें

- इस इकाई में आपके द्वारा उपयोग किए गए तीन विचार पहचानें जो अन्य विषयों को पढ़ाने में भी काम करेंगे। उन दो विषयों पर एक नोट बनाएँ जो आपको शीघ्र ही पढ़ाने हैं, जहाँ थोड़े से बदलाव के साथ उन विचारों का उपयोग किया जा सकता है।

संसाधन

संसाधन 1: एनसीएफ/एनसीएफटीई शिक्षण आवश्यकताएँ

यह यूनिट NCF (2005) तथा NCFTE (2009) की निम्न शिक्षण आवश्यकताओं से जोड़ता है तथा उन आवश्यकताओं को पूरा करने में आपकी
मदद करेगा:

- शिक्षार्थियों को उनके सीखने में सक्रिय प्रतिभागी के रूप में देखें न कि सिर्फ ज्ञान प्राप्त करने वाले के रूप में; ज्ञान निर्माण के लिए उनकी क्षमताओं को कैसे प्रोत्साहित करें; रटन्त पद्धतियों से सीखने को दूर कैसे ले जाएं।
- शिक्षण को निजी अनुभवों से अर्थ की खोज के रूप में और ज्ञान निर्माण को विचारात्मक शिक्षण की निरंतर विकास प्रक्रिया के रूप में देखें।
- विद्यार्थियों को गणित को किसी ऐसी चीज़ के रूप में लेने दें जिसके बारे में वे बात करें, जिसके द्वारा संवाद करें, जिसकी आपस में चर्चा करें, जिसपर साथ मिलकर कार्य करें।
- विद्यालय के ज्ञान को समुदाय के ज्ञान और विद्यालय के बाहर के जीवन से जोड़ें।

अतिरिक्त संसाधन

- A newly developed maths portal by the Karnataka government: http://karnatakaeducation.org.in/KOER/en/index.php/Portal:Mathematics
- Class X maths study material: http://www.zietmysore.org/stud_mats/X/maths.pdf
- National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics: https://www.ncetm.org.uk/
- National STEM Centre: http://www.nationalstemcentre.org.uk/
- OpenLearn: http://www.open.edu/openlearn/
- BBC Bitesize: http://www.bbc.co.uk/bitesize/
- Khan Academy’s math section: https://www.khanacademy.org/math
- NRICH: http://nrich.maths.org/frontpage
- Mathcelebration: http://www.mathcelebration.com/
- Art of Problem Solving’s resources page: http://www.artofproblemsolving.com/Resources/index.php
- Teachnology: http://www.teach-nology.com/worksheets/math/

- Maths is Fun: http://www.mathsisfun.com/
- National Council of Educational Research and Training's textbooks for teaching mathematics and for teacher training of mathematics: http://www.ncert.nic.in/ncerts/textbook/textbook.htm
- AMT-01 *Aspects of Teaching Primary School Mathematics*, Block 3 ('Numbers (II)'): http://www.ignou4ublog.com/2013/06/ignou-amt-01-study-materialbooks.html
- LMT-01 *Learning Mathematics*, Block 1 ('Approaches to Learning') Block 2 ('Encouraging Learning in the Classroom'), Block 6 ('Thinking Mathematically'): http://www.ignou4ublog.com/2013/06/ignou-lmt-01-study-materialbooks.html
- *Learning Curve* and *At Right Angles*, periodicals about mathematics and its teaching: http://azimpremjifoundation.org/Foundation_Publications
- Central Board of Secondary Education's books and support material (also including the *Teachers Manual for Formative Assessment – Mathematics (Class IX)*) – select 'CBSE publications', then 'Books and support material': http://cbse.nic.in/welcome.htm

संदर्भ/संदर्भग्रंथ सूची

Bell, A. (1986) 'Diagnostic teaching: 2 – Developing conflict-discussion lessons', *Mathematics Teaching*, vol. 116, pp.26–9.

Bell, A. (1987) 'Diagnostic teaching: 3 – Provoking discussion', *Mathematics Teaching*, vol. 118, pp. 21–3.

Skemp, R. (1976) 'Relational understanding and instrumental understanding', *Mathematics Teaching*, vol. 77, pp. 20–26.

Egan, K. (1986) *Teaching as Story Telling: An Alternative Approach to Teaching and Curriculum in the Elementary School*. Chicago, IL: University of Chicago Press.

National Council of Educational Research and Training (2005) *National Curriculum Framework (NCF)*.
New Delhi: NCERT.

National Council of Educational Research and Training (2009) *National Curriculum Framework for Teacher Education (NCFTE)*. New Delhi: NCERT.

National Council of Educational Research and Training (2012a) *Mathematics Textbook for Class IX*.
New Delhi: NCERT.

National Council of Educational Research and Training (2012b) *Mathematics Textbook for Class X*.
New Delhi: NCERT.

Watson, A., Jones, K. and Pratt, D. (2013) *Key Ideas in Teaching Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

अभिस्वीकृतियाँ

तृतीय पक्षों की सामग्रियों और अन्यथा कथित को छोड़कर, यह सामग्री क्रिएटिव कॉमन्स एट्रिब्यूशन-शेयरएलाइक लाइसेंस (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/) के अंतर्गत उपलब्ध कराई गई है। नीचे दी गई सामग्री मालिकाना हक की है तथा इस परियोजना के लिए लाइसेंस के अंतर्गत ही उपयोग की गई है, तथा इसका Creative Commons लाइसेंस से कोई वास्ता नहीं है। इसका अर्थ यह है कि इस सामग्री का उपयोग अननुकूलित रूप से केवल TESS-India परियोजना के भीतर किया जा सकता है और किसी भी बाद के OER संस्करणों में नहीं। इसमें TESS-India, OU और UKAID लोगो का उपयोग भी शामिल है।

इस यूनिट में सामग्री को पुनः प्रस्तुत करने की अनुमति के लिए निम्न स्रोतों का कृतज्ञतापूर्ण आभार:

चित्र 1: बाएँ, http://officespaceinjasola.blogspot.co.uk/2011/02/ से चित्र; दाएँ, http://prayfordelhi.blogspot.co.uk/ से चित्र (Figure 1: left, image from http://officespaceinjasola.blogspot.co.uk/2011/02/; right, image from http://prayfordelhi.blogspot.co.uk/)).

कॉपीराइट के स्वामियों से संपर्क करने का हर प्रयास किया गया है। यदि किसी को अनजाने में अनदेखा कर दिया गया है, तो पहला अवसर मिलते ही प्रकाशकों को आवश्यक व्यवस्थाएं करने में हर्ष होगा।

वीडियो (वीडियो स्टिल्स सहित): भारत-भर के उन अध्यापक शिक्षकों, मुख्याध्यापकों, अध्यापकों और विद्यार्थियों के प्रति आभार प्रकट किया जाता है जिन्होंने उत्पादनों में दि ओपन युनिवर्सिटी के साथ काम किया।