माध्यमिक गणित

TESS India

सहभागी अधिगम और गणितीय वार्ता: त्रिभुज

भारत में विद्यालय आधारित समर्थन के माध्यम से शिक्षक शिक्षा

www.TESS-India.edu.in

The Open University

UKaid from the British people

http://creativecommons.org/licenses/

संदेश

शिक्षकों को बाल केंन्द्रित कक्षा अभ्यास की ओर उन्मुख करने तथा शिक्षक प्रशिक्षण की गुणवत्ता को बेहतर बनाने के उद्देश्यों को सम्मुख रखते हुए TESS-India राष्ट्रीय स्तर पर कार्यरत है। इस दिशा में TESS-India द्वारा मुक्त शैक्षिक संसाधन (Open Educational Resources) का विकास किया गया है । ये संसाधन शिक्षकों तथा शिक्षक–प्रशिक्षकों के वृत्ति विकास (Professional development) में लाभकारी एवं उपयोगी सिद्ध होंगे। राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद, बिहार के नेतृत्व में इन संसाधनों का स्थानीयकृत किया गया है, जिसके अन्तर्गत इनके उद्देश्य के मूल को बरकरार रखते हुए इनमें स्थानीय, भाषा, बोली, प्रथाओं, संस्कृतियों तथा नियमों को सम्मिलित किया गया है। इनका उपयोग शिक्षण कार्य में सहजता एवं सुगमता पूर्वक किया जा सकता है ।

राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद, बिहार के मार्गदर्शन में TESS-India द्वारा स्थानीय भाषा में तैयार मुक्त शैक्षिक संसाधन (Open Educational Resources) नेट पर आप सभी के लिए सुलभ उपलब्ध है ।

शुभकामनाओं सहित ।

(डॉ0 मुरली मनोहर सिंह)

निदेशक

एस0सी0ई0आर0टी0, बिहार

समीक्षा एवं दिशाबोध
डॉ. मुरली मनोहर सिंह, निदेशक राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार
डॉ. सैयद अब्दुल मोईन, विभागाध्यक्ष, अध्यापक शिक्षा विभाग, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार
डॉ. क़ासिम खुर्शीद, विभागाध्यक्ष, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्
डॉ. इम्तियाज़ आलम, विभागाध्यक्ष, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार
डॉ. स्नेहाशीष दास राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार
डॉ. अर्चना, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार
डॉ. रीता राय, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार
श्री तेज नारायण प्रसाद, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार

स्थानीयकरण
भाषा और शिक्षा
डॉ. ज्ञानदेव मणि त्रिपाठी, प्राचार्य, मैत्रेय कॉलेज ऑफ एडुकेशन एण्ड मैनेजमेंट, हाजीपुर, वैशाली
श्री सुमन सिंह, प्रखंड साधनसेवी, भगवानपुर हाट, सिवान
श्री कात्यायान कुमार त्रिपाठी, प्राथमिक विद्यालय चैलीटाल, पटना
श्री कृत प्रसाद, प्रखंड साधनसेवी, हिलसा, नालंदा
प्राथमिक अंग्रेज़ी
श्री अरशद रज़ा, सहायक शिक्षक, प्राथमिक विद्यालय, पचासा रहुई, नालंदा
श्री संतोष सुमन, सहायक शिक्षक, बालिका उच्च विद्यालय, महुआबाग
श्री शशि भूषण पाण्डेय, सहायक शिक्षक, उत्क्रमित मध्य विद्यालय, मुकुन्दपुर, नालंदा
श्रीमती रचना त्रिवेदी, शिक्षिका, नोट्रेडेम अकादमी, पटना
माध्यमिक अंग्रेज़ी
श्री मणिशंकर, प्रधानाध्यापक, तारामणी भगवानसाव उच्च माध्यमिक विद्यालय, कोइलवर, भोजपुर
डॉ. ब्रजेश कुमार, शिक्षक, पी. एन. एंग्लो संस्कृत माध्यमिक विद्यालय, नया टोला, पटना
प्राथमिक गणित
श्री कृष्ण कान्त ठाकुर
श्री दिलीप कुमार, संकुल संसाधन केन्द्र समन्वयक, बुलनी हैदरपुर, नालंदा
श्री गोविन्द प्रसाद, प्रखंड साधनसेवी, चनपटिया, पश्चिमी चम्पारण
माध्यमिक गणित
डॉ. राकेश कुमार, भागलपुर डायट
श्री रिज़वान रिज़वी, उत्क्रमित मध्य विद्यालय, सिलौटा चाँद, कैमूर
श्री इन्द्रभूषण कुमार, शिक्षक, सहयोगी माध्यमिक विद्यालय, हाजीपुर, वैशाली
प्राथमिक विज्ञान
श्री मनोज त्रिपाठी, प्रखंड साधनसेवी, बरहारा, भोजपुर
श्री शशिकान्त शर्मा, प्रखंड साधनसेवी, आरा, भोजपुर
श्री रणबीर सिंह, संकुल संसाधन केन्द्र समन्वयक, आदर्श आवासीय मध्य विद्यालय शिक्षक संघ, सहरसा
माध्यमिक विज्ञान
श्री जी.वी.एस.आर प्रसाद
श्री मुकुल कुमार, शिक्षक, सहायक शिक्षक, गोरखनाथ सूर्यदेव माध्यमिक विद्यालय, राजापाकर वैशाली

TESS-India (Teacher Education Through School Based Support) का लक्ष्य है भारत में मुक्त शैक्षिक संसाधनों के द्वारा प्राथमिक और माध्यमिक स्तरों पर शिक्षकों के कक्षा अभ्यासों को बेहतर करना। ये संसाधन शिक्षकों के छात्र–केन्द्रित, भागीदारी दृष्टिकोण को विकसित करने में सहायता करेंगे।

TESS-India के मुक्त शैक्षिक संसाधन (Open Education Resources – OERs) शिक्षकों को विद्यालय की पाठ्यपुस्तक के लिए सहायक पुस्तिका प्रदान करते हैं। ये संसाधन शिक्षकों के लिए गतिविधियाँ प्रदान करते हैं जो वे कक्षा में अपने छात्रों के साथ कर सकते हैं। साथ ही इनमें केस स्टडी भी हैं जो ये दर्शाते हैं कि किस प्रकार दूसरे शिक्षकों ने उस विषय को सिखाया है। संबंधित संसाधन शिक्षकों को पाठ योजना बनाने में और विषय पर ज्ञान वर्धन करने में उनकी सहायता करते हैं।

TESS-India के मुक्त शैक्षिक संसाधन भारतीय पाठ्यक्रम और संदर्भों के अनुकूल हैं। ये *भारतीय तथा अतंर्राष्ट्रीय लेखकों के सहयोग से तैयार* किये गये हैं *और ये ऑनलाइन तथा प्रिंट उपयोग के लिए उपलब्ध है (http://www.tess-india.edu.in)।* मुक्त शैक्षिक संसाधन अनेकों संस्करणों में उपलब्ध हैं जो प्रत्येक राज्य के लिए उपयुक्त है जहाँ TESS India कार्यरत है। उपयोगकर्ता इन संसाधनों को अनुकूल और स्थानीयकृत करने के लिए स्वतंत्र हैं ताकि ये स्थानीय आवश्यकताओं और संदर्भों को पूरा कर सकें।

TESS-India मुक्त विश्वविद्यालय, ब्रिटेन के नेतृत्व में तथा ब्रिटेन की सरकार द्वारा वित्त-पोषित है।

वीडियो संसाधन

इस इकाई की कुछ गतिविधियों के साथ निम्न प्रतीक का उपयोग किया गया है: *. इससे संकेत मिलता है कि निर्दिष्ट अध्यापन संबंधी थीम के लिए TESS-India वीडियो संसाधनों को देखना आपके लिए उपयोगी होगा।*

TESS-India वीडियो संसाधन भारत में अनेक प्रकार की कक्षाओं के संदर्भ में मुख्य अध्यापन तकनीकों का वर्णन करते हैं। हमें आशा है कि वे आपको इसी प्रकार के अभ्यासों के साथ प्रयोग करने के लिए प्रेरित करेंगे। उनका उद्देश्य पाठ (टेक्स्ट) पर आधारित इकाइयों के माध्यम से काम करने के आपके अनुभव का पूरक होना और उसे बढ़ाना है।

TESS-India वीडियो संसाधनों को ऑनलाइन देखा या TESS-India की वेबसाइट, http://www.tess-india.edu.in/ से डाउनलोड किया जा सकता है। वैकल्पिक रूप से, आप ये वीडियो सीडी या मेमोरी कार्ड के माध्यम से भी देख सकते हैं।

संस्करण 2.0 SM06v1
Bihar

तृतीय पक्षों की सामग्रियों और अन्यथा कथित को छोड़कर, यह सामग्री क्रिएटिव कॉमन्स एट्रिब्यूशन–शेयरएलाइक लाइसेंस के अंतर्गत उपलब्ध कराई गई है: http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/

TESS-India is led by The Open University UK and funded by UK aid from the UK government

यह इकाई किस बारे में है

त्रिभुज पर अक्सर ज्यामिति के बुनियादी आकार के रूप में विचार किया जाता है, क्योंकि अन्य सभी बहुभुजों को त्रिभुजों में विभाजित किया जा सकता है। इसलिए, 'एक गणितज्ञ की तरह बोलें' और सिर्फ़ एक विषय के रूप में याद करने के बजाय गणित को समझें, यह सीखने के लिए आपके छात्र–छात्राओं को पारंपरिक शब्दावली का प्रयोग करते हुए त्रिभुज और उसके गुणों के बारे में जानने, उपयोग करने और परस्पर संवाद करने के लिए प्रेरित करना एक महत्वपूर्ण क़दम है।

इस इकाई इस बात पर ध्यान केंद्रित करेगी कि आपके छात्र–छात्राओं को गणित सीखने के लिए बातचीत का उपयोग करने में कैसे मदद करें। इसमें यह भी चर्चा की जाएगी और विचारों की पेशकश होगी कि किस प्रकार छात्र–छात्रा अपने अधिगम में एक दूसरे की सहायता कर सकते हैं और एक दूसरे को प्रभावी प्रतिक्रिया दे सकते हैं। इस तरह के सहयोगी अधिगम से छात्र–छात्राओं को और अधिक प्रेरित महसूस करने में मदद मिलती है। यह बड़ी कक्षाओं में कार्य करते समय भी विशेष रूप से उपयोगी है।

चित्र 1 त्रिभुज के साथ काम कर रहे छात्र–छात्राओं का एक समूह।

आप इस इकाई में सीख सकते हैं

- गणित सीखने में आपके छात्र–छात्रा एक दूसरे की मदद कर सकें, इस दृष्टि से किस प्रकार सहभागी अधिगम का उपयोग किया जाए।
- औपचारिक गणितीय भाषा का उपयोग करते हुए बातचीत के माध्यम से आपके छात्र–छात्राओं की मदद के लिए कुछ विचार।
- आपके छात्र–छात्राओं को प्रभावी फ़ीडबैक का उपयोग करने में मदद के लिए कुछ विचार।

इस इकाई का संबंध संसाधन 1 में दी गई एनसीएफ (2005) और एनसीएफटीई (2009) शिक्षण आवश्यकताओं से है।

1 गणित में सीखने के लिए बातचीत

गणित के बारे में बात करने के लिए छात्र–छात्राओं को प्रोत्साहित करना और ऐसा करने के लिए उपयुक्त शब्दावली विकसित करने में उनकी मदद करना शिक्षण का एक महत्वपूर्ण हिस्सा है। सोच और संप्रेषण घनिष्ट रूप से परस्पर जुड़े हैं (Sfard, 2010). यदि आप चाहते हैं कि आपके छात्र–छात्रा गणित के बारे में सोचे, समझें और इस प्रकार प्रभावी रूप से गणित सीखें, तो उन्हें अपने गणितीय विचारों को संप्रेषित करने की विधि भी सीखने की ज़रूरत होगी।

यदि आप गणितीय शब्दावली और वाक्य रचना का प्रयोग करते हुए संवाद करने के लिए अपने छात्र–छात्राओं की मदद करते हैं, तो आप उनके काम के दौरान प्रस्तुतिकरण और बात करते हुए उन्हें सुनने में सक्षम होंगे। सुन कर आप पता लगा सकते हैं कि उन्होंने गणितीय विचारों को समझा है या नहीं। इससे आपको उनके अधिगम का मूल्यांकन करने में मदद मिलेगी।

छात्र–छात्राओं को एक दूसरे के साथ उस बारे में बात करना सीखने की ज़रूरत है जो वे सोच रहे हैं। दूसरों को संप्रेषित करने के लिए विचारों को क्रमबद्ध करने की कार्रवाई से उन्हें धारणाओं को सीखने में मदद मिलेगी (Lee, 2006) और कभी–कभी ग़लतफ़हमियों को सुधारने में भी सक्षम होंगे।

ज़रा सोचिए

- स्वयं अपनी कक्षा के बारे में विचार करें। आपकी कक्षा में छात्र–छात्राओं और आपके बीच, या सिर्फ़ छात्र–छात्राओं के बीच कितना संप्रेषण होता है? छात्र–छात्रा गणितीय शब्दावली का उपयोग करना कितना आसान पाते हैं? आपको ऐसा क्यों लगता है?
- आपने गणितीय अवधारणाओं को संप्रेषित करना किस प्रकार सीखा? आपने गणित के बारे में किससे बात की थी? क्या बातचीत से आपको अपने विचारों को सुलझाने में मदद मिली?

छात्र–छात्राओं से मुख्य शब्दों का उपयोग करने की अपेक्षा करना और उन्हें ऐसी स्थिति में डालना, जहाँ उनके लिए ऐसा करना ज़रूरी हो, अत्यंत महत्वपूर्ण है। इसे प्रभावी रूप से हासिल करने के लिए, नई शब्दावली का उपयोग करने वाले कार्य परिणाम के लिए महत्वपूर्ण हैं। गतिविधि 1 छात्र–छात्राओं को त्रिभुज बनाते हुए और उसका वर्णन करते हुए ऐसा करने के लिए कहता है।

इस इकाई में अपने छात्र–छात्राओं के साथ गतिविधियों के उपयोग का प्रयास करने के पहले अच्छा होगा कि आप सभी गतिविधियों को पूरी तरह (या आंशिक रूप से) स्वयं करके देखें। यह और भी बेहतर होगा यदि आप इसका प्रयास अपने किसी सहकर्मी के साथ करें क्योंकि जब आप अनुभव पर विचार करेंगे तो आपको मदद मिलेगी। स्वयं प्रयास करने से आपको छात्र–छात्राओं के अनुभवों के भीतर झांकने का मौका मिलेगा, जो परोक्ष रूप से आपके शिक्षण और एक शिक्षक के रूप में आपके अनुभवों को प्रभावित करेगा। जब आप तैयार हों, तो अपने छात्र–छात्राओं के साथ गतिविधियों का उपयोग करें। पाठ के बाद, सोचें कि गतिविधि किस तरह हुई और उससे क्या सीख मिली। इससे आपको सीखने वाले छात्र–छात्राओं पर ध्यान केंद्रित रखने वाला अधिक शैक्षिक वातावरण बनाने में मदद मिलेगी।

गतिविधि 1: त्रिभुज के बारे में गणितीय रूप से बात करना

तैयारी

इस गतिविधि के लिए, आपको विभिन्न लंबाई वाली छड़ियों के ढेर की ज़रूरत होगी। आप बाँस से उपयुक्त छड़ियाँ काट सकते हैं। छड़ियों की लंबाई की सीमा पर्याप्त रूप से बड़ी होना चाहिए – मान लें, 2 इंच से 18 इंच तक।

आदर्श रूप से प्रत्येक छात्र–छात्रा के लिए कम से कम तीन छड़ियाँ होनी चाहिए। यदि यह संभव नहीं है, तो छात्र–छात्राओं की प्रत्येक जोड़ी के लिए या तीन छात्र–छात्राओं के एक जैसे समूहों के लिए तीन छड़ियों का उपयोग करें। प्रत्येक छात्र (या छात्र–छात्राओं की जोड़ी) यादृच्छिक रूप से तीन छड़ियाँ उठाता है। सुनिश्चित करें कि उन्हें अपनी छड़ियों की लंबाई का चयन करने का मौक़ा न मिले। छात्र–छात्राओं को बाहर ले जाना मददगार होगा जहाँ उन्हें चलने–फिरने के लिए पर्याप्त जगह मिले।

बोर्ड पर या दीवार पर काग़ज़ के एक बड़े टुकड़े पर शब्द लिखें।

गतिविधि

छात्र–छात्राओं से कहें कि वे अपने द्वारा चुनी गई तीन छड़ियों का उपयोग करते हुए एक त्रिभुज बनाएँ।

अपने छात्र–छात्राओं से निम्नलिखित पूछें:

- क्या आप में से कुछ लोग त्रिभुज नहीं बना पा रहे हैं? यदि हाँ, तो आप चर्चा करें कि इसका क्या कारण है।
- यदि आपको केवल एक छड़ी बदलने की अनुमति दी जाती है, तो वह छड़ी कौन–सी होगी और क्यों?
- इन शब्दों में से जितने चाहे उतने शब्दों का उपयोग करते हुए अपने त्रिभुज का वर्णन करें (आवश्यकतानुसार इस सूची को बढ़ाएँ या घटाएँ):

  न्यून, अधिक, सम, लम्ब, विषम, समद्विबाहु, समबाहु, कोण, भुजा, लंबाई, अंश, बड़ा, छोटा, लंबा, लघु, क्षेत्रफल, वर्ग, विपरीत, संलग्न।

अब छात्र–छात्राओं को एक और छड़ी दें, ताकि उनके पास कुल मिलाकर चार छड़ियाँ हो जाएँ।

अपने छात्र–छात्राओं से कहें कि:

- वे चार अलग त्रिभुज बनाएँ
- पुनः उपर्युक्त सूची से यथा संभव जितने चाहे उतने शब्दों का उपयोग करते हुए, उनके सहपाठी को बताएँ कि चारों त्रिभुजों में क्या समता है और क्या विषमता।

गतिविधि 1 का उपयोग कक्षा IX के BTBC book में पाठ 6.7 त्रिभुज का कोण योग गुण में पहले किया जा सकता है (पृष्ठ 126)।

केस स्टडी 1: श्रीमती वन्दना गतिविधि 1 के उपयोग का अनुभव बताती हैं

यह एक शिक्षिका की कहानी है, जिसने अपने माध्यमिक कक्षा के छात्र–छात्राओं के साथ गतिविधि 1 का प्रयास किया।

मैंने यह सुनिश्चित किया कि शुरुआत में ही कक्षा को मैं बता दूँ कि वे क्यों यह गतिविधि कर रहे हैं। मैंने उन्हें बताया कि यह वास्तव में महत्वपूर्ण है कि वे त्रिभुज के सभी विभिन्न भागों को पहचानें और उनके बारे में बात करें। फिर वे अपने पाठ्यपुस्तक में या परीक्षा में हल करने के लिए पूछे जाने वाले सवालों को बेहतर रूप से समझने में सक्षम होंगे। मैंने उन्हें यह भी कहा कि पाठ के अंत में, मैं उनसे यह जाँचने के लिए कहूँगी कि त्रिभुज के हर हिस्से के लिए पारंपरिक शब्दावली का प्रयोग कर सकते हैं, क्योंकि उनके लिए यह सुनिश्चित करना महत्वपूर्ण है कि उन्होंने समझा है और सही तरह नामों का उपयोग कर सकते हैं।

चूँकि मेरी कक्षा में बहुत छात्र–छात्रा हैं, इसलिए यह अभ्यास करने के लिए मैंने उन्हें तीन के समूह में काम करने के लिए कहा। प्रत्येक समूह से एक छात्र आगे आया और तीन छड़ियाँ उठाई; मैंने उन्हें थाम रखा था, ताकि उन्हें पता न चले कि वे छोटी छड़ियाँ उठा रहे हैं या बड़ी।

फिर मैंने उनसे कहा कि वे तीन छड़ियों के सिरे मिलाते हुए त्रिभुज बनाएँ और जब यह कार्य संपन्न हो जाए, तो अपने हाथ ऊपर उठाएँ। कुछ समूहों ने बहुत जल्दी अपने हाथ ऊपर उठा दिए, लेकिन ऐसा करने के लिए बहुत ही कोशिश की जा रही थी, और विशेष रूप से दो समूहों में। मैंने उन्हें रूकने को कहा और जो समूह त्रिभुज बना चुके थे उन्हें बैठने के लिए कहा।

फिर मैंने उन दो समूहों से कारण पूछा जो अभी भी खड़े थे। 'हम त्रिभुज नहीं बना सकते, मिस,' उन्होंने कहा। 'क्यों नहीं?' मैंने पूछा। पहले उन्होंने इस प्रकार कहना शुरू किया 'छड़ियाँ मिलाई नहीं जा सकती' या 'हम नोक नहीं बना पा रहे हैं' उन्होंने रोका और कक्षा से पूछा कि जब त्रिभुज में हों तो छड़ियों और नोक को क्या कहा जाता है। अंतरानी ने कहा 'वे भुजा और शीर्ष हैं,' इस पर सही शब्दावली का उपयोग करने के लिए मैंने उसे बधाई दी – और उन्हें पाठ के प्रयोजन की

स्मरण कराया। बहुत चर्चा और दूसरों से मदद लेने के बाद, दो समूह यह कहने में सक्षम हुए ‘त्रिभुज बनाने के लिए, दो छोटी भुजाओं की लंबाइयों का योग लंबी भुजा की लंबाई से अधिक होनी चाहिए’। यह असली वर्ग प्रयास था, इसलिए मु यक़ीन हो गया कि उन सबने योगदान दिया था और इस बिंदु को समझा था। इसके बाद उन्हें दूसरे समूह के साथ अप छड़ियों की अदला–बदली करने की अनुमति दी गई और हम दूसरे भाग की ओर बढ़े।

मैंने छात्र–छात्राओं से कहा कि उन्हें पारंपरिक गणितीय भाषा का प्रयोग करते हुए बाक़ी कक्षा को अपने त्रिभुज का परिचय करवाना होगा। मैंने उनके द्वारा उपयोग किए जाने वाले शब्दों को ब्लैकबोर्ड पर लिखा, और पाठ्यपुस्तक का उपयोग करते हुए जाँचा कि उनके लिए ज़रूरी सभी चीज़ें मैंने समझा दी हैं। मैंने उन्हें अपने त्रिभुज को नाम देने और यथा संभव ब्लैकबोर्ड पर मौजूद अनेक शब्दों का उपयोग करते हुए परिचय पर विचार करने के लिए दस मिनट दिए।

क्योंकि मैंने शब्दों की सूची लिख दी थी, इसलिए छात्र गणितीय रूप से बोल सकते थे; इसके अलावा, मैंने हर छात्र को उनके द्वारा बनाए गए त्रिभुज के बारे में कुछ कहना आवश्यक बनाया ताकि चर्चा में हर कोई कुछ योगदान दे।

यह दिलचस्प रहा क्योंकि कुछ छात्र–छात्राओं ने अपने त्रिभुज के लिए बहुत ही असामान्य विवरण प्रस्तुत किए। सोना ने कहा कि उसने ‘एक बूढ़ा त्रिभुज’ बनाया है। जब मैंने इस प्रकार कहने का मतलब उससे जानना चाहा, तो उसने कहा कि वह झुक रहा है। मैंने उसे गणितीय शब्द का उपयोग करने को कहा, लेकिन वह उसके लिए शब्द सोच नहीं पाई, तब मैंने उसे ब्लैकबोर्ड पर चित्रित करने को कहा और दूसरों से पूछा कि वे उसे क्या कहेंगे। रवि ने फ़ौरन कहा कि वह ‘अधिक कोण’ है। हमने इन त्रिभुजों पर चर्चा की और, परिणामस्वरूप, हमने कई चीज़ों पर चर्चा की। जैसे–जैसे प्रत्येक समूह ने अपने त्रिभुज का परिचय दिया मैंने ब्लैकबोर्ड पर ‘कर्ण’, ‘विपरीत’, ‘न्यून’, ‘अधिक’, आदि को टिक किया, और उन्हें बताया कि वे कितने सफल रहे। किसी ने सभी शब्दों का उपयोग नहीं किया, लेकिन वे इसके क़रीब पहुँच गए।

अपने सीखने–सिखाने के अभ्यास के बारे में सोचना

जब आप अपनी कक्षा के साथ ऐसी कोई गतिविधि करें, तो बाद में सोचे कि क्या ठीक रहा और कहाँ गड़बड़ हुई। ऐसे प्रश्नों पर विचार करें जिसमें छात्र–छात्राओं ने दिलचस्पी दिखाई और वे प्रश्न, जहाँ आपको स्पष्ट करने की ज़रूरत हुई। ऐसे चिंतन से वह ‘स्क्रिप्ट’ मिल जाती है, जिसकी मदद से आप छात्र–छात्राओं के मन में गणित के प्रति रुचि जगा सकते हैं और उसे मनोरंजक बना सकते हैं। अगर छात्र–छात्राओं को समझ नहीं आ रहा है और वे कुछ नहीं कर पा रहे हैं, तो इसका मतलब है कि उनकी इसमें सम्मिलित होने की रुचि नहीं है। जब भी आप गतिविधियाँ करें, इस विचार करने वाले अभ्यास का उपयोग करें, कुछ छोटी–छोटी ऐसी चीज़ों को नोट करते हुए जिनसे काफ़ी फ़र्क पड़ा, जैसा कि श्रीमती वन्दना ने किया।

ज़रा सोचिए

ऐसे चिंतन को गति देने वाले अच्छे प्रश्न निम्नलिखित हैं:

- आपकी कक्षा में इसका प्रदर्शन कैसा रहा?
- छात्र–छात्राओं से किस प्रकार की प्रतिक्रिया अनपेक्षित थी? क्यों?
- अपने छात्र–छात्राओं की समझ का पता लगाने के लिए आपने क्या सवाल किए?
- किन बिंदुओं पर आपको लगा कि पाठ के अंत में आपको दुबारा समझाना पड़ा?
- अगले पाठ में आप किस प्रकार इस सीख पर पुनः बल देंगे?

गणितीय वार्तालाप को प्रोत्साहित करने के लिए एक व्यावहारिक गतिविधि का उपयोग करना एक ऐसी तकनीक है, जिसका आप कई अलग–अलग विषयों में उपयोग कर सकते हैं। दो अन्य ऐसे विषयों के बारे में सोचने का प्रयास करें, जहाँ आप इस तकनीक का उपयोग कर सकते हैं। अपने विचारों को अपने विद्यालय या स्थानीय विद्यालयों के गणित के साथी शिक्षकों के साथ साझा करें और उनके विचारों का नोट तैयार करें, जिसे आपकी पाठ योजना में एकीकृत किया जा सके।

2 प्रभावी फ़ीडबैक (प्रतिपुष्टि)

फ़ीडबैक शिक्षण में बहुत बड़ा फ़र्क लाते हुए देखा गया है (Hattie and Timperley, 2007) जब वह स्पष्ट रूप से इन तीन प्रश्नों का उत्तर दें:

- मैं किस दिशा में बढ़ रहा/रही हूँ?
- मैं कैसे काम कर रहा/रही हूँ?
- अब इसके आगे क्या?

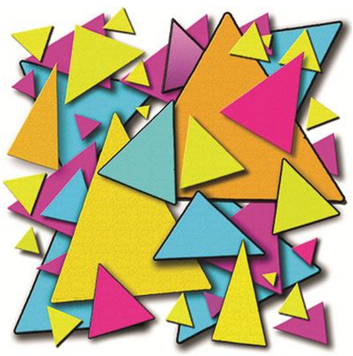
सर्वप्रथम छात्र को शिक्षण के प्रयोजन या उद्देश्य (मैं किस दिशा में बढ़ रहा/रही हूँ) के बारे में बहुत स्पष्ट होने की जरूरत है। मैं कैसे काम कर रहा/रही हूँ? पर फ़ीडबैक ने छात्र–छात्राओं को शिक्षण के मामले में वे किस दिशा में बढ़ रहे हैं और इस समय वे कहाँ है के बीच के अंतराल को पाटने के लिए अधिक ध्यान और प्रेरणा प्रदर्शित करते हुए दर्शाया है। लेकिन, वे उस प्रेरणा को तभी व्यावहारिक रूप से लागू कर सकते हैं, जब वे तीसरे प्रश्न 'अब इसके आगे क्या?' का उत्तर जानते हुए अंतराल को और अधिक पाट सकें।

प्रतिपुष्टि (फ़ीडबैक) देने और प्राप्त करने के लिए शिक्षक और छात्र, दोनों को पर्याप्त कौशल की ज़रूरत है। इसके लिए कक्षा लोकाचार की आवश्यकता है, जो छात्र–छात्राओं को किसी के उपहास के बिना अपने विचारों को अभिव्यक्त करने का मौक़ा दे और जहाँ हर किसी के शिक्षण और मिलजुल कर सुधार करने पर पूरी तरह ध्यान केंद्रित हो। ऐसे लोकाचार के तहत शिक्षकों या अन्य छात्र–छात्राओं के लिए 'मैं किस दिशा में बढ़ रहा/रही हूँ?' और 'अब इसके आगे क्या?' पर केंद्रित फ़ीडबैक देना, और छात्र–छात्राओं के लिए उस फ़ीडबैक को सुनना और उस पर कार्रवाई करना संभव है।

यदि छात्र–छात्रा मिलजुल कर अपनी धारणाओं को आज़माने का प्रयास करते हैं, तो वे एक दूसरे से लगातार प्रतिक्रिया प्राप्त कर सकते हैं। फ़ीडबैक शिक्षकों के समरूप गुणवत्ता वाली नहीं होगी, क्योंकि छात्र–छात्राओं का विषय ज्ञान उतना गहरा नहीं होगा और ना ही वे शिक्षक की भाँति संबंध जोड़ पाते हैं; लेकिन, फ़ौरन फ़ीडबैक प्राप्त करने का मौक़ा गुणवत्ता के मुद्दे से कहीं ज्यादा महत्वपूर्ण है।

अगली गतिविधि का उद्देश्य त्रिभुजों के बारे में अधिक जानना है, लेकिन यह वर्गकक्ष को प्रभावी फ़ीडबैक के लिए तीन प्रश्नों ('मैं किस दिशा में बढ़ रहा/रही हूँ?', 'मैं कैसे काम कर रहा/रही हूँ?' और 'अब इसके आगे क्या?') का उपयोग करते हुए आज़माने का मौक़ा भी देता है। आप इस गतिविधि से विचारों को अन्य गणितीय विषयों पर भी लागू कर सकते हैं।

गतिविधि 2: क्या होगा यदि ...?



चित्र 2: छात्र कितने अलग प्रकार के त्रिभुज बना सकते हैं?

प्रत्येक छात्र, या छात्र–छात्राओं के समूह के सामने छड़ियों से तैयार किया गया त्रिभुज होना चाहिए।

अपने छात्र–छात्राओं से कहें कि वे समूहों में निम्न प्रश्नों पर चर्चा करें:

- उन्हीं तीन छड़ियों का प्रयोग करते हुए, आप कितने अलग त्रिभुज बना सकते हैं? क्यों? क्या होगा यदि आप दो छड़ियों की स्थिति में अदला–बदली करते हैं?
- यदि आप एक छोटी या लंबी छड़ी में अदला–बदली करें तो त्रिभुज का क्या होगा?
- क्या होगा यदि आप दो छड़ियों के बीच कोण को कम करें या बढ़ा दें?
- तीन भुजाओं और तीन कोणों को मापें। इन मापों को घटते क्रम में व्यवस्थित करें। आप क्या देखते हैं? क्या अन्य छात्र–छात्राओं ने भी यही देखा? त्रिभुजों के लिए इसके परिणामस्वरूप अपने प्रेक्षण का उल्लेख करें।
- दो ऐसे त्रिभुजों के बारे में परिणाम तैयार करें, जिनकी संगत भुजाओं की लंबाइयाँ समरूप हैं। क्या आपके विचार में सभी त्रिभुजों के लिए यह कथन सही है? क्या आप इस कथन को अन्य बहुभूज के लिए विस्तृत कर सकते हैं?

इसके अलावा छात्र–छात्राओं से विचार–विमर्श के दौरान और बाद में प्रश्नों पर विचार करने के लिए कहें:

- मैं किस दिशा में बढ़ रहा/रही हूँ?
- मैं कैसे काम कर रहा/रही हूँ?
- अब इसके आगे क्या?

फिर उनसे कक्षा के साथ अपने निष्कर्षों को साझा करने के लिए कहें। समूहों से कहें कि वे 'मैं किस दिशा में बढ़ रहा/रही हूँ?', 'मैं कैसे काम कर रहा/रही हूँ?' और 'अब इसके आगे क्या?' पर अपने विचार सम्मिलित करें। छात्र–छात्राओं से कहें कि वे अन्य समूहों को सुनें और तैयारी करें तथा इन प्रश्नों पर अपनी प्रतिक्रिया दें।

फिर अलग–अलग छात्र–छात्राओं से कक्षा के समक्ष अपने विचारों को प्रस्तुत करने के लिए कहें। अन्यछात्र–छात्राओं को टिप्पणी करने के लिए प्रोत्साहित करें। सुनिश्चित करने का प्रयास करें कि विभिन्न समूहों केछात्र–छात्राओं को बोलने का मौक़ा मिलता है।

गतिविधि 2 का उपयोग कक्षा IX के BTBC book के पाठ 6.7 त्रिभुज का कोण योग गुण में पहले किया जा सकता है (पृष्ठ 47)।

केस स्टडी 2: श्रीमती वन्दना गतिविधि 2 के उपयोग का अनुभव बताती हैं

मैंने गतिविधि 1 के बाद सीधे गतिविधि 2 का उपयोग किया। छात्र–छात्राओं ने विभिन्न त्रिभुज बनाने की कोशिश में बहुत समय लगाया और मुझे छड़ियों के सिरों को मिलाने के बारे में उन्हें याद दिलाते रहना पड़ा। अंततः उन सबने महसूस किया कि उनके पास पहले चार सवालों के जवाब थे। इस बार मैंने उनसे किसी दूसरे समूह को अपने परिणाम प्रस्तुत करने और उन्हें सही साबित करने की कोशिश करने और उन्हें विश्वास दिलाने के लिए कहा। मैंने पाठ के उद्देश्य या 'मैं किस दिशा में बढ़ रहा/रही हूँ?' के बारे में एक दूसरे को सुनना शुरू करने से पहले सोचने के लिए कहते हुए, जिसके बारे में अब तक मैंने कई बार बात की थी, कक्षा को फ़ीडबैक के बारे में विचारों से परिचय करवाया। फिर मैंने सुनने वाले समूह से 'मैं कैसे काम कर रहा/रही हूँ?' पर अपने विचार प्रस्तुत करने वाले समूह को अपने विचार सम्मिलित करें। फ़ीडबैक देने के लिए कहा। पाँच मिनट के बाद मैंने वर्गकक्ष को सुनना छोड़ कर प्रस्तुत करने के लिए याद दिलाया।

उसके बाद, हमने कक्षा में विचार–विमर्श किया। मैंने पहले पूछा, 'क्या आसान था?' कक्षा ने कहा कि उन्हें अपने त्रिभुज और भुजाओं के बारे में बात करना बहुत आसान लगा, लेकिन जब तक किसी ने विचार करने और बदलने की याद नहीं दिलाई वे बता नहीं पाए कि क्यों त्रिभुज समरूप थे – लेकिन अलग! उन्होंने त्रिभुजों का वर्णन करने के लिए 'समरूप' शब्द का भी प्रयोग किया, जिसे सुन कर मुझे बेहद खुशी हुई। हमने 'समरूप' के गणितीय अर्थ पर चर्चा की और मैंने गणितीय त्रिभुज और आकारों में 'समरूप' के मतलब की अपनी गणितीय परिभाषा लिखने के लिए प्रत्येक समूह से कहा।

फिर मैंने छात्र–छात्राओं से पूछा कि उन्हें क्या कठिन लगा। उन्होंने कहा कि उपयुक्त प्रतिपुष्टि (फ़ीडबैक) देना कठिन था, लेकिन उसने उन्हें वाक़ई सोचने पर मजबूर किया। 'मैं कैसे काम कर रहा/रही हूँ?' का उपयोगी उत्तर देने का प्रयास करना अपने विचार सम्मिलित करें। आसान नहीं था, लेकिन उसके कारण आपने जो कहा उसके बारे में सोचना पड़ा। मैंने जवाब दिया, 'हाँ, मैं जानती हूँ!' यह भी एक दिलचस्प सत्र बन गया और मुझे लगता है कि बहस ने काफ़ी छात्र–छात्राओं की मदद की, क्योंकि वे कक्षा के बाद काफ़ी खुश नज़र आ रहे थे।

वीडियो: सभी को शामिल करना

आप 'सभी को शामिल करना' से संबंधित मुख्य संसाधन पर भी नज़र डालना चाहेंगे।

ज़रा सोचिए

- छात्र–छात्राओं से किस प्रकार की प्रतिक्रिया अनपेक्षित थी? क्यों?
- अपने छात्र–छात्राओं की समझ का पता लगाने के लिए आपने क्या सवाल किए?
- क्या आपने कार्य में किसी भी तरीके का संशोधन किया? अगर हाँ, तो इसके पीछे आपका क्या कारण था?

यदि आपको इंटरनेट तक पहुँच हासिल है, तो आप भी इसी तरह के नियत कार्यों को तैयार करने के लिए गतिशील ज्यामिति सॉफ्टवेयर (जैसे कि निःशुल्क डाउनलोड करने के लिए उपलब्ध प्रोग्राम GeoGebra) का उपयोग कर सकते हैं।

3 सहभागी अधिगम

भरी हुई कक्षा में सीखने के अवसरों को बढ़ाने के लिए, छात्र–छात्राओं को चाहिए कि वे केस स्टडी 2 के लिए श्रीमती वन्दना की वर्गकक्ष में किए गए अनुसार एक दूसरे की मदद करें। तथापि, माध्यमिक गणित कक्षाओं में शायद ही कभी सहभागी अधिगम को लागू किया जाता है और जहाँ ऐसा होता है, वहाँ उद्देश्यपूर्वक होने के बजाय वह अक्सर डिफ़ॉल्ट से होता है। Slavin et al (2003) ने प्रमाण की काफ़ी समीक्षा की और निष्कर्ष निकाला कि 'सहभागी अधिगम आधुनिक अनुसंधान के इतिहास की सबसे बड़ी सफलता की कहानियों में से एक है' (पृ. 177). इस सफलता के चार प्रमुख कारण (Wiliam, 2011) निम्न प्रतीत होते हैं:

1. **प्रेरणा**: छात्र–छात्रा एक दूसरे को सीखने में मदद करते हैं, क्योंकि ऐसा करना स्वयं उनके हित में है। इसका चौतरफ़ा प्रयास बढ़ाने पर प्रभाव पड़ता है, जिसके फलस्वरूप शिक्षण में अधिक सफलता हासिल होती है और उसके कारण चुनौतीपूर्ण अवधारणाओं को हल करने के लिए अधिक प्रेरणा मिलती है।
2. **सामाजिक एकजुटता**: छात्र–छात्रा अपने साथियों की मदद इसलिए करते हैं कि वे एक ही समूह का हिस्सा हैं और उनके लिए समूह की सफलता मायने रखती है।
3. **वैयक्तिकरण**: यदि किसी विशेष छात्र को परेशानी हो रही हो, तो इस बात की संभावना है कि समूह में कोई और उसकी मदद करे। जहाँ समूह अच्छी तरह संरचित हों, वहाँ हमेशा वही लोग मदद नहीं करते या मदद प्राप्त नहीं करते।
4. **संज्ञानात्मक विस्तार**: विचार–विमर्श में योगदान देने वाले लोगों को विचारों के माध्यम से सोचने के लिए और स्वयं अपने तथा दूसरों को उन्हें स्पष्ट करने के लिए मजबूर किया जाता है।

यदि किसी बड़ी कक्षा में छात्र–छात्राओं को अपेक्षित मदद पाना हो, तो उन्हें एक दूसरे की मदद करने के लिए उपलब्ध होना चाहिए। छात्र–छात्राओं द्वारा एक दूसरे को पढ़ाना आश्चर्यजनक रूप से प्रभावी हो सकता है: एक अध्ययन में छात्र–छात्राओं ने अपने शिक्षक से वैयक्तिक रूप से सिखाये जाने पर जितना सीखा लगभग उतना ही साथी द्वारा सिखाये जाने पर भी सीखा, संभवतः इसका कारण यह हो कि उन्हें साथी द्वारा प्रश्न पूछे जाने पर कम भय महसूस होता है (Schacter, 2000).

अगली गतिविधि का उद्देश्य एक समस्या को हल करने के लिए अन्य गणितीय विचारों के साथ संबंध स्थापित करने के क्रम में छात्र–छात्राओं को सहयोगपूर्वक एक साथ काम करने के लिए कहना है।

गतिविधि 3: संबंध जोड़ना

इस गतिविधि के लिए आपको प्रत्येक छात्र के लिए कम से कम तीन छड़ियों की ज़रूरत है। यदि यह संभव नहीं है, तो छात्र–छात्राओं की प्रत्येक जोड़ी के लिए या तीन छात्र–छात्राओं के एक जैसे समूहों के लिए तीन छड़ियों का उपयोग करें। प्रत्येक छात्र (या छात्र–छात्राओं की जोड़ी) यादृच्छिक रूप से तीन छड़ियाँ उठाता है। सुनिश्चित करें कि उन्हें अपनी छड़ियों की लंबाई का चयन करने का मौक़ा न मिले।

अपने छात्र–छात्राओं से कहें:

- अब आप अपनी छड़ियों को खिसका सकते हैं, ताकि आपके द्वारा तैयार त्रिभुज की सबसे लंबी भुजा का एक भाग 'काट' सकें, जिससे तीन लंबाइयाँ एक समकोण त्रिभुज का निर्माण करें।
- अपने समूहों में चर्चा करें कि आप किस प्रकार काटी जाने वाली सही लंबाई जानेंगे। इस लंबाई का पता लगाने के लिए किन तथ्य(यों) का आप उपयोग करेंगे?
- समकोण त्रिभुज बनाने के लिए आपके द्वारा प्रयुक्त तीन छड़ियों को यथासंभव सटीक रूप से मापें।
- तीन छड़ियों में से प्रत्येक की लंबाई का एक दूसरे के प्रति अनुपात का पता लगाएँ।
- किसी और छात्र को खोजें, जिससे ये अनुपात मेल खाते हों।
- दूसरे छात्र–छात्रा से छानबीन करें कि आपके त्रिभुजों के बीच क्या सामान्य है, जिसके परिणामस्वरूप अनुपात

मेल खा रहे हैं।

- निरूपित करें और अपने निष्कर्ष वर्गकक्ष में प्रस्तुत करें।

गतिविधि 3 का उपयोग कक्षा X के NCERT book के पाठ 6.6 पाइथागोरस परिमेय में पहले किया जा सकता है।

केस स्टडी 3: श्रीमती वन्दना गतिविधि 3 के उपयोग का अनुभव बताती हैं

मैंने कुछ समय पहले कक्षा में पाइथागोरस प्रमेय पढ़ाया औरत्रिभुजमिति पर आगे बढ़ना चाहती थी। अब चूँकि कक्षा में साथ मिल कर त्रिभुज के बारे में खुशी से बात हो रही थी और सही शब्दावली का उपयोग कर रहे थे, मैंने सोचा मैं यह जानने के लिए इस अभ्यास का उपयोग कर सकती हूँ कि उन्हें पाइथागोरस कितनी अच्छी तरह याद हैं और क्या मुझे दुबारा सिखानी चाहिए या नहीं।

मैंने उन्हें बताया कि इस सत्र का प्रयोजन समकोणत्रिभुजों के साथ काम करना, उनके द्वारा सीखे अन्य गणितीय विचारों के लिए संबंध जोड़ना और उन्हें जो पता था उस ज्ञान में विस्तार करना है। इसका मतलब था कि वे जब भी संबंध जोड़ सकें, तो उन्हें अपने लिए उसे नोट करना होगा, ताकि वे कक्षा के साथ उन्हें साझा कर सकें और मैं अंत में उनसे पूछूँगी कि क्या उन्होंने नया कुछ सीखा है।

उन्होंने स्वाभाविक रूप से समूहों का गठन किया, जो कल गतिविधि 1 और 2 करते समय उन्होंनेप्रयोग किया था और अपनी छड़ियों को थाम लिया। उन्होंने बात करना शुरू किया कि वे कैसे आश्वस्त थे कि उनके पास 'काटने' के लिए स लंबाई है – मैंने वास्तव में उन्हें अपनी छड़ी काटने नहीं दिया, सिर्फ़ उन्हें चिह्नित करने के लिए कहा। पहले उन्होंने माप के बारे में यह कहते हुए बातचीत शुरू की कि यदि हम सही तरह 90मापते हैं, तो वह ठीक होगा, इसके लिए उन्होंने अपना कोणमापक निकाला और मापना शुरू कर दिया। मैं देखना चाहती थी कि जब वे एक दूसरे के साथ बात कर रहे तब क्या हो सकता है, इसलिए मैं बस विभिन्न समूहों को सुन रही थी। मैंने कुछ लोगों को कहते सुना 'निशान लगाओ', 'हाय, यह तो सरक गया' और 'ऐसा करना मुश्किल है'। मैंने पूरी कक्षा से इस बारे में सोचने के लिए कहा कि उस सम वे गणित के साथ कौन–सा संबंध जोड़ रहे थे, जिसे वे जानते हैं, क्योंकि मुझे लगा कि वे बस मापने में तल्लीन हैं। मैंने उन सबको चुप रहने और 30 सेकंड सोचने, और फिर काम पर लौटने के लिए कहा।

शांति से सोचने के समय ने असर दिखाया और एक ने कहना शुरू किया, 'हमें कर्ण का पता लगाना चाहिए, तो हम उपयोग में लाएँगे, हुँ...प...' किसी और ने कहा 'पाइथागोरस – अरे वो क्या था!' मैंने देखा कि कई लोग अपनी पाठ्यपुस्तक में पाइथागोरस प्रमेय ढूँढ़ रहे थे। लग रहा था कि वे कुछ ही मिनटों में बस दुहरी जाँच कर रहे थे, वे समकोण नाप रहे और वर्गमूल निकाल रहे थे। मैं बेहद खुश थी कि मुझे बस उन्हें सोचने के लिए समय देना है और फिर बड़ी आसानी से पूरी वर्गकक्ष ने पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग करने और स्वाभाविक रूप से सही उत्तर पाने में एक दूसरे की मदद की।

मुझे लगा कि वर्गकक्ष में अधिकांश लोगों को पाइथागोरस की अच्छी समझ थी, लेकिन मैंने देखा किपवन और कुछ और लोग उलझन में थे। मैंने उनसे कहा कि जब कक्षा के बाक़ी लोग भाग 2 शुरू कर दें वे मुझसे बात करें और मैंने पाया वे पाइथागोरस प्रमेय पर पाठसिखाते समय अनुपस्थित थे। साथ मिल कर हमने योजना बनाई कि वे कैसे इसकी पूर्ति करेंगे, जिसमें पाठ्यपुस्तक का उपयोग, इंटरनेट का उपयोग करना शामिल था और उनके अगले पाठ से पहले, अगले सप्ताह उन्हें जो समझ में आया उसे मुझे बताना था।

मैंने छात्र–छात्राओं को स्वेच्छा से आगे आने और इस कार्य को कैसे हासिल किया, यह बताने के लिए कहा। मैंने उनसे यह भी पूछा कि क्या इस गतिविधि को उन्होंने किसी अलग पद्धति से भी हल किया। उन्हें पुनः चार के समूहों में विभाजि करने के बाद इस चर्चा के साथ गतिविधि का दूसरा भाग संपन्न किया गया कि क्या हो रहा है?

उन्होंने इच्छा से भाग 2 को हल करना शुरू किया। वे जानते थे कि कुछ पता करना है और वे उसका पता लगाना चाह थे। उन्होंने इसकी दुहरी जाँच करते हुए अंकगणित से हल किया कि उनके पास सही उत्तर है। (वे सामान्य रूप से कब जाँच करते हैं? आम तौर पर वे बस अभ्यास पूरा करने की कोशिश करते हैं!) भिन्न के रूप में रखे जाने पर वे अनुपात व तुलना नहीं कर पाए, इसलिए उनको एहसास हुआ कि उन्हें कुछ और करना चाहिए। कुछ ने कहा कि हम बराबर का भि कर सकते हैं; कुछ को दशमलव स्वरूप में दर्शाना आसान लगा। सौभाग्य से विभिन्न आकार के समद्विबाहु त्रिभुज वाले कई समूह थे और कुछ 30–, 60 और 90 डिग्री के त्रिभुज वाले भी। इसलिए एकसमान उत्तर वाले छात्र–छात्राओं का स्वाभाविक रूप से समूह गठित हुआ और वे देख सकते थे कि यदि कोण एकसमान हों, सभी भुजाओं के लिए अनुपात एकसमान हो – एक मामले में उन्होंने यह भी देखा कि भुजाओं की संख्या दुगुनी हो गई। यह त्रिभुजमिति अनुपात के बारे में सीखने के लिए एकदम सही शुरुआत थी, लेकिन उसे अगले पाठ तक इंतज़ार करना पड़ा। पहले हमें कुछ प्रश्नों के जवाब देने थे, ताकि वे देख सकें कि उन्होंने पाठ के उद्देश्य की सफलतापूर्वक पूर्ति की है।

ज़रा सोचिए

- कितनी बार आप छात्र–छात्राओं के सीखने–सिखाने की प्रक्रिया का मूल्यांकन करने के लिए समस्या समाधान तकनीक का उपयोग करते हैं? आपके विचार में क्या श्रीमती वन्दना को पता चल सका कि उनकी कक्षा में हरेक क्या कर सकता है? उनमें से कइयों को पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग कैसे किया जाए, यह याद करने में कुछ मदद मिली होगी, क्या इसका मतलब है कि वे इसके बारे में नहीं जानते थे?

आपके वर्गकक्ष को प्रश्न हल करते हुए देखने से आपको यह जानने में मदद मिल सकती है कि कौन गणितीय अवधारणा के उपयोग की पद्धति को समझ रहा है, कौन सिर्फ़ एल्गोरिथ्म का अनुसरण कर रहा है और इसलिए संदर्भ से पीछे छूट गया है, कौन बिल्कुल ही नहीं समझ पा रहा है। शायद यहाँ सबसे महत्वपूर्ण बात है कि छात्र–छात्रा समझ जाएँ कि वे क्या कर सकते हैं और क्या नहीं कर सकते हैं। एक शिक्षक के रूप में, फिर आप 'इसके आगे कहाँ?' प्रश्न पर वाकई अच्छा फ़ीडबैक दे सकते हैं, ठीक वैसे ही, जैसे श्रीमती वन्दना ने किया।

वीडियो: प्रगति और कार्यप्रदर्शन का आकलन करना

अधिक विवरण के लिए, संसाधन 2 'प्रगति और कार्यप्रदर्शन का आकलन' पढ़ें।

4 सारांश

इस इकाई ने त्रिभुजों के बारे में सिखाने के लिए तीन महत्वपूर्ण मुद्दों पर ध्यान केंद्रित करने के लिए अवधारणाओं का उपयोग किया:

- छात्र–छात्राओं को अपने गणितीय विचारों के बारे में बात करने में सक्षम बनाने हेतु मदद करने की आवश्यकता। छात्र–छात्राओं को यदि उन्हें पूरी तरह समझना हैं और जिस वर्तमान संदर्भ में उसे सीखा, यदि उससे परे उनका उपयोग करना है, तो उन्हें अपने विचारों को अभिव्यक्त करने में सक्षम होने की ज़रूरत है। क्योंकि सोचने के लिए भाषा की आवश्यकता है, वे छात्र, जिन्हें विशिष्ट गणितीय शब्दावली और वाक्य रचना का स्वयं उपयोग करने के लिए मदद दी गई है, सोचने के लिए कहने पर फ़ायदेमंद स्थिति में हैं।
- छात्र–छात्राओं को अपने शिक्षण में अधिक संलग्न होने और अधिक प्रेरित महसूस करने में मदद करने के लिए प्रतिपुष्टि (फीडबैक) की भूमिका।

- **सहभागी अधिगम**, जहाँ छात्र अपने शिक्षण में एक दूसरे की प्रभावी रूप से सहायता करते हैं। यह बड़ी कक्षाओं को पढ़ाते समय विशेष रूप से उपयोगी है।

ज़रा सोचिए

- इस इकाई में आपके द्वारा उपयोग किए गए तीन विचार पहचानें जो अन्य विषयों को सिखाने में भी काम करेंगे। उन दो विषयों पर अब एक नोट तैयार करें, जिन्हें आप जल्द ही सिखाने वाले हैं, जहाँ थोड़े–बहुत समायोजन के साथ उन अवधारणाओं का उपयोग किया जा सकता है।

संसाधन

संसाधन 1: एनसीएफ/एनसीएफटीई की शिक्षण आवश्यकताएँ

इस इकाई की सीख नीचे बताई गई NCF (2005) और NCFTE (2009) की शिक्षण आवश्यकताओं से जुड़ी है:

- छात्र–छात्राओं को उनके सीखने–सिखाने की प्रक्रिया में सक्रिय प्रतिभागी के रूप में देखें न कि सिर्फ ज्ञान प्राप्त करने वाले के रूप में; ज्ञान निर्माण के लिए उनकी क्षमताओं को प्रोत्साहित करने के लिए; रोट पद्धतियों (रटना) से सीखने–सिखाने को दूर ले जाने के लिए।
- शिक्षण को निजी अनुभवों से अर्थ की खोज के रूप में और ज्ञान निर्माण को विचारात्मक सीखने–सिखाने के निरंतर विकास प्रक्रिया के रूप में देखें।
- छात्र–छात्राओं को गणित से डरने के बजाय उसका आनंद उठाना सिखाने के लिए समर्थन।

संसाधन 2: प्रगति और प्रदर्शन का मूल्यांकन

छात्र–छात्राओं के सीखने का मूल्यांकन करने के दो उद्देश्य हैं:

- **योगात्मक मूल्यांकन** पीछे मुड़ कर देखता है और जो पहले से सीखा गया है उसका निर्णय करता है। यह सामान्यतया परीक्षाओं के स्वरूप में आयोजित किया जाता है, जहाँ छात्र–छात्राओं को परीक्षा में प्रश्नों के प्रति उनकी उपलब्धियों को बताते हुए श्रेणीकृत किया जाता है। इससे परिणामों की रिपोर्टिंग में मदद मिलती है।
- **निर्माणात्मक मूल्यांकन** (या सीखने का मूल्यांकन) काफ़ी अलग है, जो अधिक अनौपचारिक तथा नैदानिक स्वरूप का होता है। शिक्षक उन्हें सीखने–सिखाने की प्रक्रिया के अंग के रूप में उपयोग करते हैं, उदाहरण के लिए, जहाँ यह पता लगाने के लिए प्रश्न पूछने का उपयोग किया जाता है कि क्या छात्र–छात्राओं ने किसी चीज़ को समझा है या नहीं। इस मूल्यांकन के परिणामों का फिर अगले शिक्षण अनुभव को बदलने के लिए उपयोग किया जाता है। निगरानी और फ़ीडबैक निर्माणात्मक मूल्यांकन का हिस्सा है।

निर्माणात्मक मूल्यांकन शिक्षा–प्राप्ति को बढ़ाता है, क्योंकि सीखने के लिए, अधिकांश छात्र–छात्राओं को:

- समझना चाहिए कि उनसे क्या सीखने की उम्मीद की जा रही है
- जानना चाहिए कि अपनी पढ़ाई में वे इस समय किस स्तर पर हैं
- समझना चाहिए कि वे किस प्रकार प्रगति कर सकते हैं (अर्थात् क्या सीखना चाहिए और कैसे सीखना चाहिए)
- जानना चाहिए कि कब उन्होंने लक्ष्य और अपेक्षित परिणाम हासिल कर लिए हैं।

शिक्षक के रूप में, अगर आप प्रत्येक पाठ में उपर्युक्त चार बिंदुओं पर ध्यान देंगे, तो आप अपने छात्र–छात्राओं से सर्वश्रेष्ठ परिणाम प्राप्त करेंगे। इस प्रकार सिखाने से पहले, सिखाते समय और सिखाने के बाद मूल्यांकन किया जा सकता है:

- **पहलेः** सिखाने से पहले मूल्यांकन से आपको यह जानने में मदद मिलती है कि छात्र क्या जानते हैं और सिखाने से पहले क्या कर सकते हैं। यह आधार–रेखा निर्धारित करता है और आपको अपनी सीखने–सिखाने योजना तैयार करने के लिए प्रारंभिक बिंदु देता है। छात्र–छात्रा क्या जानते हैं इस बारे में अपनी समझ को बढ़ाने से, छात्र–छात्राओं को जिसमें पहले से ही महारत हासिल है, उसे दुबारा सिखाने या संभवतः उन्हें जो जानना या समझना है (लेकिन नहीं जानते), उसे छोड़ने के मौक़े कम होंगे।
- **पढ़ाते समयः** कक्षा में सिखाते समय मूल्यांकन करने में यह देखना शामिल है कि क्या छात्र–छात्रा सीख रहे हैं और उनमें सुधार हो रहा है। इससे आपको अपनी सीखने–सिखाने की पद्धति, संसाधनों और गतिविधियों का समायोजन करने में मदद मिलेगी। यह आपको यह समझने में मदद करेगा कि छात्र वांछित उद्देश्य की दिशा में किस प्रकार प्रगति कर रहा है और आपका शिक्षण कितना सफल है।
- **सिखाने के बादः** शिक्षण के बाद किया जाने वाला मूल्यांकन पुष्टि करता है कि छात्र–छात्राओं ने क्या सीखा है और आपको दर्शाता है कि किसने सीखा है और किसे अभी मदद की ज़रूरत है। इससे आप अपने सीखने–सिखाने के लक्ष्य का प्रभावी आकलन कर सकेंगे।

पहलेः आपके छात्र–छात्रा क्या सीखेंगे इस बारे में स्पष्ट रहना

जब आप तय करते हैं कि छात्र–छात्राओं को पाठ या पाठों की शृंखला में क्या सीखना चाहिए, तो आपको उसे उनके साथ साझा करना चाहिए। सावधानी से अंतर करें कि छात्र–छात्राओं को आप क्या करने के लिए कह रहे हैं, और छात्र–छात्राओं से क्या सीखने की उम्मीद की जा रही है। ऐसा प्रश्न पूछिये जिससे कि आपको इस बात का आकलन करने का अवसर प्राप्त हो कि क्या उन्होंने वाक़ई समझा है या नहीं। उदाहरण के लिएः

छात्र–छात्राओं को जवाब देने से पहले सोचने के लिए कुछ सेकंड दें, या शायद छात्र–छात्राओं को पहले जोड़े या छोटे समूहों में अपने जवाब पर चर्चा करने के कहें। जब वे आपको अपना उत्तर बताएँ, आप जान जाएँगे कि क्या वे समझते हैं कि उन्हें क्या सीखना है।

पहलेः जानना कि छात्र–छात्रा अपने सीखने के किस स्तर पर हैं

आपके छात्र–छात्राओं में सुधार के लिए मदद करने के क्रम में आपको और उन्हें उनके ज्ञान और समझदारी की वर्तमान अवस्था को जानने की ज़रूरत पड़ेगी। जैसे ही आप वांछितसीखने–सिखाने के परिणामों या लक्ष्यों को साझा कर लें, आप निम्न कर सकते हैं:

- छात्र–छात्राओं को मानसिक मानचित्र बनाने या उस विषय के बारे में वे पहले से क्या जानते हैं, उसे सूचीबद्ध करने के लिए जोड़े में कार्य करने के लिए कहें, और उन्हें उसे पूरा करने के लिए पर्याप्त समय दें, लेकिन उन चंद विचारों के लिए बहुत ज्यादा समय नहीं देना चाहिए। उसके बाद आप उन मानसिक मानचित्र या सूचियों की समीक्षा करें।
- महत्वपूर्ण शब्दावली को बोर्ड पर लिखें और प्रत्येक शब्द के बारे में वे क्या जानते हैं, यह बताने के लिए स्वेच्छा से उन्हें आगे आने के लिए कहें। फिर बाक़ी कक्षा से कहें कि यदि वे शब्द समझते हैं, तो अपना अंगूठा थम्ब्स–अप की मुद्रा में ऊपर उठाएँ, यदि वे बहुत कम जानते हैं या बिल्कुल नहीं जानते हैं, तो थम्ब्स–डाउन की मुद्रा में नीचे करें और यदि वे कुछ जानते हैं, तो अंगूठे को क्षैतिज यानी बीच में रखें।

कहाँ से शुरुआत करनी है, यह जानने का मतलब है कि आप अपने छात्र–छात्राओं के लिए प्रासंगिक और रचनात्मक रूप से पाठ की योजना बना सकते हैं। यह भी महत्वपूर्ण है कि आपके छात्र–छात्रा यह मूल्यांकन करने में सक्षम हों कि वे कितनी अच्छी तरह सीख रहे हैं, ताकि आप और वे, दोनों जान सकें कि उन्हें आगे क्या सीखने की ज़रूरत है। आपके छात्र–छात्राओं को स्वयं अपने शिक्षण का भार उठाने का अवसर प्रदान करने से उन्हें आजीवन शिक्षार्थी बनाने में मदद मिलेगी।

सिखाते समयः शिक्षा में छात्र–छात्राओं की प्रगति सुनिश्चित करना

जब आप छात्र–छात्राओं से उनकी वर्तमान प्रगति के बारे में बात करते हैं, तो सुनिश्चित करें कि उन्हें आपका फीडबैक उपयोगी और रचनात्मक, दोनों लगे। निम्नांकित के द्वारा इस काम को करें:

- छात्र–छात्राओं को उनकी ताकत और यह जानने में मदद करना कि वे कैसे और सुधार कर सकते हैं
- इस बारे में स्पष्ट रहना कि आगे और किस चीज़ के विकास की ज़रूरत है
- इस बारे में सकारात्मक रहना कि वे किस प्रकार अपनी शिक्षा का विकास कर सकते हैं, जाँचना कि वे समझते हैं और आपकी सलाह का उपयोग करने में सक्षम महसूस करते हैं।

आपको छात्र–छात्राओं के लिए उनके शिक्षण को बेहतर बनाने के लिए अवसर मुहैया कराने की ज़रूरत पड़ेगी। इसका अर्थ यह हुआ कि सीखने–सिखाने के मामले में छात्र–छात्राओं के वर्तमान स्तर और जहाँ आप उन्हें देखना चाहते हैं, इसके बीच के अंतराल को पाटने के लिए हो सकता है कि आपको अपनी सीखने की योजना को संशोधित करना पड़े। ऐसा करने के लिए आपको निम्नतः करना होगा:

- कुछ ऐसे कार्य पर वापस नज़र दौड़ाना होगा, जिनके बारे में आपने सोचा था कि वे पहले से जानते हैं
- आवश्यकता के अनुसार छात्र–छात्राओं के समूह बनाना, उन्हें अलग–अलग कार्य देना
- छात्र–छात्राओं को स्वयं यह निर्णय लेने के लिए प्रोत्साहित करना कि उन्हें किन संसाधनों को पढ़ने की ज़रूरत है ताकि वे 'स्वयं अपना अंतराल पाट सकें'
- 'निम्न प्रवेश, ऊँची सीमा' वाले कार्यों का उपयोग करना, ताकि सभी छात्र प्रगति कर सकें – इन्हें इसलिए अभिकल्पित किया गया है कि सभी छात्र काम शुरू कर सकें, लेकिन अधिक समर्थ को प्रतिबंधित न किया जाए और वे अपने ज्ञान के विस्तार के लिए प्रगति कर सकें।

पाठों की रफ्तार को धीमा करके, अक्सर आप दरअसल सीखने–सिखाने की प्रक्रिया को तेज़ करते हैं, क्योंकि आप छात्र–छात्राओं को उस पर सोचने और समझने का समय और आत्मविश्वास देते हैं, जिसमें उन्हें सुधार लाने की ज़रूरत होती है। छात्र–छात्राओं को आपस में अपने काम के बारे में बात करने का मौक़ा देकर, और इस बात पर

चिंतन करके कि अंतराल कहाँ पर है और वे इसे किस प्रकार से ख़त्म कर सकते हैं, आप उन्हें स्वयं का आकलन करने के तरीक़े मुहैया करा रहे हैं।

सिखाने के बादः प्रमाण एकत्रित करना और उसकी व्याख्या करना, और आगे की योजना बनाना

जब सीखना–सिखाना चल रहा हो और कक्षा–कार्य और गृह–कार्य निर्धारित करने के बाद, ज़रूरी है किः

- इस बात का पता लगाएँ कि आपके छात्र कितनी अच्छी तरह कार्य कर रहे हैं
- इसे अगले पाठ के लिए अपनी योजना सूचित करने के लिए उपयोग में लाएँ
- छात्र–छात्राओं को प्रतिक्रिया दें।

मूल्यांकन की चार प्रमुख स्थितियों की नीचे चर्चा की गई है।

सूचना या प्रमाण एकत्रित करना

प्रत्येक छात्र, स्वयं अपनी गति और शैली में, विद्यालय के अंदर और बाहर अलग प्रकार से सीखता है। इसलिए, छात्र–छात्राओं का मूल्यांकन करते समय आपको दो चीज़ें करनी होंगीः

- विविध सूत्रों से जानकारी एकत्रित करें – स्वयं अपने अनुभव से, छात्र, अन्य छात्र–छात्राओं, अन्य शिक्षकों, अभिभावकों और समुदाय के सदस्यों से।
- छात्र–छात्राओं का व्यक्तिगत रूप से, जोड़ों में और समूहों में मूल्यांकन करें, तथा स्व–मूल्यांकन को बढ़ावा दें। अलग विधियों का प्रयोग महत्वपूर्ण है, क्योंकि कोई एक पद्धति आपके वह सभी जानकारी उपलब्ध नहीं कराती, जिसकी आपको ज़रूरत है। छात्र–छात्राओं के सीखने और प्रगति के बारे में जानकारी इकट्ठा करने के विभिन्न तरीक़ों में शामिल हैं, देखना, सुनना, विषयों और प्रकरणों पर चर्चा, तथा लिखित वर्ग और गृह–कार्य की समीक्षा करना।

अभिलेखन

भारत भर के सभी विद्यालयों में रिकॉर्डिंग का सबसे आम स्वरूप रिपोर्ट कार्ड के उपयोग के माध्यम से होता है, लेकिन इसमें आपको एक छात्र के सीखने या व्यवहार के सभी पहलुओं को रिकॉर्ड करने की अनुमति नहीं हो सकती है। इस काम को करने के कुछ सरल तरीक़े हैं, जिन पर भी आप विचार कर सकते हैं, जैसे किः

- सीखते–सिखाते समय जो आप देखते हैं उसे डायरी/नोटबुक/रजिस्टर में नोट करना
- छात्र–छात्राओं के कार्य के नमूने (लिखित, कला, शिल्प, परियोजनाएँ, कविताएँ आदि) पोर्टफ़ोलियो में रखना
- प्रत्येक छात्र का प्रोफ़ाइल तैयार करना
- छात्र–छात्राओं की किन्हीं असामान्य घटनाओं, परिवर्तनों, समस्याओं, शक्तियों और शिक्षण प्रमाणों को नोट करना।

प्रमाण की व्याख्या

जैसे ही सूचना और प्रमाण एकत्रित और अभिलिखित हो जाए, उसकी व्याख्या करना ज़रूरी है, ताकि यह समझ सकें कि प्रत्येक छात्र किस प्रकार सीख रहा है और प्रगति कर रहा है। इस पर सावधानी से विचार करने और विश्लेषण की आवश्यकता है। फिर आपको सीखने–सिखाने में सुधार करने, संभवतः छात्र–छात्राओं को प्रतिपुष्टि (फ़ीडबैक) देकर या नए संसाधनों की खोज करके, समूहों को पुनर्व्यवस्थित करके, या शिक्षण बिंदु को दोहरा कर अपने निष्कर्षों पर कार्य करने की आवश्यककता है।

सुधार के लिए योजना बनाना

मूल्यांकन, विशिष्ट और विभेदक सीखने–सिखाने की गतिविधियों की स्थापना द्वारा प्रत्येक छात्र को सार्थक रूप से सीखने के अवसर प्रदान करने, अधिक मदद के ज़रूरतमंद छात्र–छात्राओं पर ध्यान देने और अधिक उन्नत छात्र–छात्राओं को चुनौती देते हुए सार्थक सीखने–सिखाने के अवसर उपलब्ध कराने में आपकी मदद कर सकते हैं।

अतिरिक्त संसाधन

- A newly developed maths portal by the Karnataka government: http://karnatakaeducation.org.in/KOER/en/index.php/Portal:Mathematics
- Class X maths study material: http://www.zietmysore.org/stud_mats/X/maths.pdf
- National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics: https://www.ncetm.org.uk/
- National STEM Centre: http://www.nationalstemcentre.org.uk/
- OpenLearn: http://www.open.edu/openlearn/
- BBC Bitesize: http://www.bbc.co.uk/bitesize/
- Khan Academy's math section: https://www.khanacademy.org/math
- NRICH: http://nrich.maths.org/frontpage
- Mathcelebration: http://www.mathcelebration.com/
- Art of Problem Solving's resources page: http://www.artofproblemsolving.com/Resources/index.php
- Teachnology: http://www.teach-nology.com/worksheets/math/
- Maths is Fun: http://www.mathsisfun.com/
- National Council of Educational Research and Training's textbooks for teaching mathematics and for teacher training of mathematics: http://www.ncert.nic.in/ncerts/textbook/textbook.htm
- LMT-01 *Learning Mathematics*, Block 1 ('Approaches to Learning') Block 2 ('Encouraging Learning in the Classroom'), Block 6 ('Thinking Mathematically'): http://www.ignou4ublog.com/2013/06/ignou-lmt-01-study-materialbooks.html
- *Learning Curve* and *At Right Angles*, periodicals about mathematics and its teaching: http://azimpremjifoundation.org/Foundation_Publications
- Central Board of Secondary Education's books and support material (also including the *Teachers Manual for Formative Assessment – Mathematics (Class IX)* – select 'CBSE publications', then ' Books and support material': http://cbse.nic.in/welcome.htm

संदर्भ/संदर्भग्रंथ सूची

De Geest, E. (2007) *Many Right Answers: Learning in Mathematics through Speaking and Listening*. Basic Skills Agency, London. Available from: http://shop.niace.org.uk/media/catalog/product/m/a/manyrightanswers.pdf (accessed 24 July 2014).

Hattie, J. and Timperley, H. (2007) 'The power of feedback', R*eview of Educational Research*, vol. 77, no. 1.

Lee, C. (2006) Language for Learning: Assessment for Learning in Practice. Maidenhead: Open University Press.

National Council of Educational Research and Training (2005) *National Curriculum Framework (NCF)*. New Delhi: NCERT.

National Council of Educational Research and Training (2009) *National Curriculum Framework for Teacher Education (NCFTE)*. New Delhi: NCERT.

Pimm, D. (1995) Symbols and Meanings in School Mathematics. London: Routledge.

Schacter, J. (2000) 'Does individual tutoring produce optimal learning?', *American Educational Research Journal*, vol. 37, no. 3.

Sfard, A. (2010) *Thinking as Communicating*. Cambridge: Cambridge University Press.

Slavin, R., Hurley, E. and Chamberlain, A. (2003) 'Cooperative learning and achievement' in Reynolds, W.M. and Miller, G.J. (eds) *Handbook of Psychology: Vol. 7, Educational Psychology*. Hoboken, NJ: Wiley.

Watson, A., Jones, K. and Pratt, D. (2013) *Key Ideas in Teaching Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Wiliam, D. (2011) *Embedded Formative Assessment*. Bloomington, IN: Solution Tree Press.

Zack, V. and Graves, B. (2001) 'Making mathematical meaning through dialogue: "Once you think of it, the Z minus three seems pretty weird"', *Educational Studies in Mathematics*, vol. 46, pp. 229–71.

अभिस्वीकृतियाँ

यह सामग्री क्रिएटिव कॉमन्स एट्रिब्यूशन–शेयरएलाइक लाइसेंस (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/) के अंतर्गत उपलब्ध कराई गई है, जब तक कि अन्यथा निर्धारित न किया गया हो। यह लाइसेंस TESS-India, OU और UKAID लोगो के उपयोग को वर्जित करता है, जिनका उपयोग केवल TESS-India परियोजना के भीतर अपरिवर्तित रूप से किया जा सकता है।

कॉपीराइट के स्वामियों से संपर्क करने का हर प्रयास किया गया है। यदि किसी को अनजाने में अनदेखा कर दिया गया है, तो पहला अवसर मिलते ही प्रकाशकों को आवश्यक व्यवस्थाएं करने में हर्ष होगा।

वीडियो (वीडियो स्टिल्स सहित): भारत–भर के उन शिक्षक प्रशिक्षकों, प्रधानाध्यापकों, शिक्षकों और छात्र–छात्राओं के प्रति आभार प्रकट किया जाता है जिन्होंने उत्पादनों में दि ओपन युनिवर्सिटी के साथ काम किया।