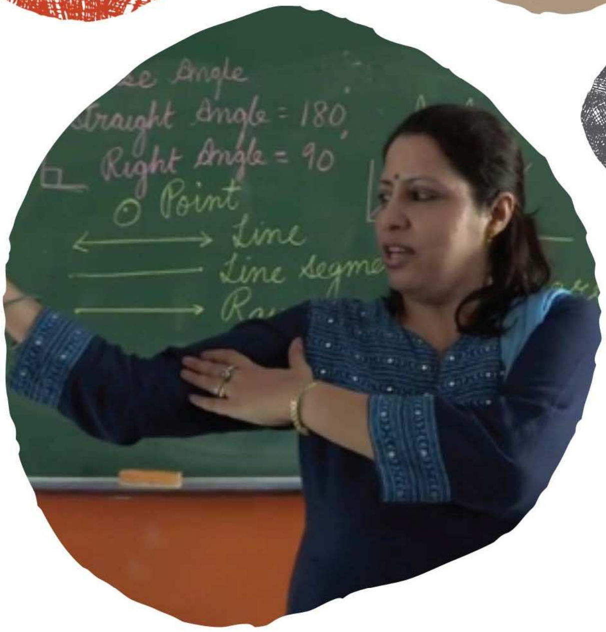
प्राथमिक गणित

TESS India

विद्यार्थियों को विश्वास दिलाना कि वे गणित के प्रश्न हल कर सकते हैं: भिन्नों पर कार्य



भारत में विद्यालय आधारित समर्थन के माध्यम से शिक्षक शिक्षा

www.TESS-India.edu.in

The Open University

UKaid from the British people

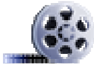
CC BY SA
http://creativecommons.org/licenses/

TESS-India (स्कूल-आधारित समर्थन के ज़रिए अध्यापकों की शिक्षा) का उद्देश्य है विद्यार्थी-केंद्रित, सहभागी दृष्टिकोणों के विकास में शिक्षकों की सहायता के लिए मुक्त शिक्षा संसाधनों (OER) के प्रावधानों के माध्यम से भारत में प्रारंभिक और माध्यमिक शिक्षकों की कक्षा परिपाटियों में सुधार लाना। TESS-India OER शिक्षकों को स्कूल की पाठ्यपुस्तक के लिए सहायक पुस्तिका प्रदान करते हैं। वे शिक्षकों के लिए अपनी कक्षाओं में अपने विद्यार्थियों के साथ प्रयोग करने के लिए गतिविधियाँ प्रदान करते हैं, जिनमें यह दर्शाने वाले केस स्टडी भी शामिल रहते हैं कि अन्य शिक्षकों द्वारा उस विषय को कैसे पढ़ाया गया, और उनमें शिक्षकों के लिए अपनी पाठ योजनाएँ तैयार करने के लिए तथा विषय संबंधी ज्ञान के विकास में सहायक संसाधन भी जुड़े रहते हैं।

TESS-India OER को भारतीय पाठ्यक्रम और संदर्भों के अनुकूल भारतीय तथा अंतर्राष्ट्रीय लेखकों के सहयोग से तैयार किया गया है और ये ऑनलाइन तथा प्रिंट उपयोग के लिए उपलब्ध हैं (http://www.tess-india.edu.in)। OER भाग लेने वाले प्रत्येक भारतीय राज्य के लिए उपयुक्त, कई संस्करणों में उपलब्ध हैं और उपयोगकर्ताओं को इन्हें अपनाने तथा अपनी स्थानीय जरूरतों एवं संदर्भों की पूर्ति के लिए उनका अनुकूलन करने के लिए और स्थानीयकरण करने के लिए आमंत्रित किया जाता है।

TESS-India मुक्त विश्वविद्यालय, ब्रिटेन के नेतृत्व में तथा ब्रिटेन की सरकार द्वारा वित्त-पोषित है।

वीडियो संसाधन

इस इकाई में कुछ गतिविधियों के साथ निम्नलिखित आइकॉन दिया गया है:  *. यह दर्शाता है कि आपको विशिष्ट शैक्षणिक थीम के लिए TESS-India के वीडियो संसाधनों को देखने में इससे मदद मिलेगी।*

TESS-India के वीडियो संसाधन भारत में विभिन्न प्रकार की कक्षाओं के संदर्भ में प्रमुख शैक्षणिक तकनीकों का सचित्र वर्णन करते हैं। हमें उम्मीद है कि वे आपको इसी तरह के अभ्यासों के साथ प्रयोग करने के लिए प्रेरित करेंगे। इन्हें पाठ-आधारित इकाइयों के माध्यम से आपके कार्य अनुभव में इज़ाफ़ा करने और बढ़ाने के लिए रखा गया है, लेकिन अगर आप उन तक पहुँच बनाने में असमर्थ रहते हैं तो बता दें कि वे उनके साथ एकीकृत नहीं हैं।

TESS-India के वीडियो संसाधनों को TESS-India की वेबसाइट (http://www.tess-india.edu.in/) पर ऑनलाइन देखा सकता है या डाउनलोड किया जा सकता है। विकल्प के तौर पर, आप इन वीडियो तक सीडी या मेमोरी कार्ड पर भी पहुँच बना सकते हैं।

संस्करण 2.0 EM06v1
All India - Hindi

तृतीय पक्षों की सामग्रियों और अन्यथा कथित को छोड़कर, यह सामग्री क्रिएटिव कॉमन्स एट्रिब्यूशन-शेयरएलाइक लाइसेंस के अंतर्गत उपलब्ध कराई गई है: http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/

TESS-India is led by The Open University UK and funded by UK aid from the UK government

यह इकाई किस बारे में है

विद्यार्थियों के लिए भिन्न हमेशा से समझने हेतु एक कठिन विषय रहा है – और एक ऐसा विषय जो विद्यार्थियों में नकारात्मक भावुक प्रतिक्रियाएँ उत्पन्न कर सकता है। भिन्न पर कार्यों के बारे में समझना, और भी चूनौतिपूर्ण होता है।

इस इकाई में आप विद्यार्थियों द्वारा गणितीय अंकन पढ़ते समय कल्पना करने में सक्षम होने के लिए तकनीकों के उपयोग का अन्वेषण करेंगे। कल्पना उन विद्यार्थियों के लिए एक साधन के रूप में भी कार्य कर सकता है, जो अटक जाते हैं, क्योंकि यह उनके 'गणितीय आघात' को कम करने में मदद कर सकता है। यह इकाई, सोच को चुनौती देने वाले *प्रश्न पूछना: भिन्न इकाई में विकसित विचारों पर भी कार्य करती है।*

विचार के लिए रुकें

उस समय में वापस जाकर सोचें जब आपने आखिरी बार भिन्न पर कार्य पढ़ाया था। उस विद्यार्थी के बारे में सोचें, जिसके लिए यह समझना आसान नहीं था कि क्या करना है। याद करने का प्रयास करें कि ऐसी कौन सी चीज़ थी, जो उनकी समझ के बीच आ रही थी।

आप इस इकाई में क्या सीख सकते हैं

- भिन्नों पर कार्य के संबंध में आपके विद्यार्थियों की समझ को बढ़ाने में किस प्रकार मदद करें।
- भिन्नों पर कार्य में प्रयुक्त गणितीय संकेतन की कल्पना करने के बारे में विद्यार्थियों को सिखाने के लिए कुछ प्रभावी तरीके।
- गणितीय संकेतन पढ़ने और लिखने में आप अपने विद्यार्थियों की मदद कैसे करें।

इस इकाई का संबंध NCF (2005) और NCFTE (2009) की दर्शाई गई शिक्षण आवश्यकताओं से है। संसाधन 1।

1 गणित सीखने से संबंधित कुछ समस्याएँ – 'गणितीय आघात'

'गणितीय आघात' थोड़ा नाटकीय लगता है। हालाँकि, अधिक से अधिक शोध ऐसे प्रमाण प्रदान करते हैं, जो विद्यार्थियों द्वारा गणित पढ़ते समय वास्तविक, विक्षुब्ध आघात का अनुभव किए जाने की ओर इशारा करते हैं। बात बीच में खत्म करके या अनदेखा करके यह कहना आसान लगता है कि 'उन्हें कुछ समझ नहीं आता' या 'उन्हें पढ़ाई में और मेहनत तथा अभ्यास करना चाहिए'। लेकिन ऐसा मानने के ऐसे वास्तविक कारण हैं, कि इस आघात के कारण ही लोग अपने जीवन में आगे गणित का उपयोग नहीं कर पा रहे हैं, जिसकी वजह से उन्हें तथा समाज को संपूर्ण रूप में कई नकारात्मक परिणामों का सामना करना पड़ता है।

गणितीय आघात विद्यार्थियों के इस एहसास तथा विश्वास से उत्पन्न होता है कि उन्हें गणित सीखते समय खुद से कुछ करना या सोचना नहीं चाहिए या वे कुछ कर अथवा सोच नहीं सकते। लैंज और मीनी (2011) ने गणितीय आघात का इस रूप में वर्णन किया: 'गणित के संबंध में अभिव्यक्ति, व्याख्या और एजेंसी के लिए अवसरों से वंचित होना और इसलिए उसे सतही गणितीय ज्ञान के निष्क्रिय प्राप्तकर्ताओं का दर्जा दिया गया है'।

गणितीय आघात का प्रभावित विद्यार्थियों के लिए गंभीर परिणाम हो सकता है। वे गणित को ऐसी चीज़ कहकर अस्वीकार कर सकते हैं, जिसे वे नहीं कर सकते। वे स्वयं ही पूर्वानुमान लगाने लगते हैं क्योंकि जैसे ही उन्हें गणित में किसी क्षेत्र के बारे में कुछ समझ में आना बंद हो जाता है, उन्हें यह विश्वास हो जाता है कि ऐसा इसलिए हो रहा है क्योंकि उन्हें 'वह समझ' नहीं आता है और वे कभी भी समझ नहीं पाएँगे। यह गणित के अन्य क्षेत्रों में उनकी क्षमता के प्रति उनके आत्मविश्वास को प्रभावित कर सकता है। वे ऐसा महसूस करने लगते हैं कि उनके पास कोई विकल्प या कोई नियंत्रण नहीं है। इसे 'कोई एजेंसी न होने' के रूप में जाना जाता है।

गणित आघात के ट्रिगर में से एक ट्रिगर स्वयं गणित की भाषा है। यह प्रतीकात्मक प्रतिनिधित्व और गणितीय शब्दावली दोनों है, जिससे मौजूदा भाषा ज्ञान और संरचनाओं से जुड़ना बिल्कुल अलग और कठिन लग सकता है।

2 भिन्न पर कार्य करने के बारे में सीखने से संबंधित समस्याएँ

शोध सुझाव देते हैं कि भिन्न के कार्यों को समझना सीखते समय विद्यार्थियों के लिए मुख्य बाधाओं में से एक यह होता है कि उन्हें अकसर बिना इस बात के पीछे की संकल्पनात्मकता समझाए बिना कि नियम और प्रक्रियाएँ क्यों कार्य करती हैं, प्रक्रियाएँ और नियम पढ़ाए जाते हैं (फ़ाज़ियो और सीग्लर, 2011)। यह सुझाव दिया जाता है कि 'विद्यार्थियों की संकल्पनात्मक समझ को बेहतर बनाने का एक तरीका', भिन्न के मैनिपुलेटिव्ज़ और विज़ुअल प्रतिनिधियों का उपयोग करना है। अभ्यासक्रम जिसने भिन्न के विज़ुअल प्रतिनिधियों का उपयोग करके भिन्न अंकगणित पढ़ाया है, उसने विद्यार्थियों के कंप्यूटेशनल कौशल पर सकारात्मक प्रभाव दिखाया है (फ़ज़ियो और सीग्लर, 2011, पृ. 12)। इस इकाई में भिन्न के कार्यों के विषय को पढ़ाने की अपनी प्रक्रिया के भाग के रूप में विज़ुअल प्रतिनिधि के उपयोग का अन्वेषण करते हैं।

अगली गतिविधि का लक्ष्य, भिन्न को जोड़ते और घटाते समय कल्पना की समस्या का हल करना है और यह जानना है कि इन कार्यों के लिए एक सार्व हर की आवश्यकता क्यों है। विद्यार्थियों के कल्पना कौशल को विकसित करने के लिए, विद्यार्थियों को अपने खुद की विधियों और दृष्टिकोण के साथ आगे आने के लिए पर्याप्त समय और अवसर देना आवश्यक है। अगर वे पूरी तरह से सही नहीं हैं, तो प्रदान की गई गलत अवधारणाओं का पूरी कक्षा के सामने की जाने वाली चर्चाओं में समाधान किया जा सकता है।

इस अंक में अपने विद्यार्थियों के साथ गतिविधियों के उपयोग का प्रयास करने से पहले अच्छा होगा कि आप सभी गतिविधियों को पूरी तरह या आंशिक रूप से स्वयं करके देखें। यह और भी बेहतर होगा अगर आप अपने किसी सहकर्मी के साथ मिलकर इसे करने का प्रयास करें क्योंकि स्वयं के अनुभव के आधार पर सिखाना आसान होगा। स्वयं प्रयास करने से आपको शिक्षार्थी के अनुभवों के भीतर झाँकने का मौका मिलेगा, जो परिणामस्वरूप आपके शिक्षण और एक शिक्षक के रूप में आपके अनुभवों को प्रभावित करेगा।

जब आप तैयार हों, तब गतिविधियों का अपने विद्यार्थियों के साथ उपयोग करें और फिर से इस बात पर विचार करें कि गतिविधि कैसी हुई और क्या सीख मिली। इससे आपको अधिक विद्यार्थी को केंद्र में रखने वाला शैक्षिक वातावरण बनाने में मदद मिलेगी।

गतिविधि 1: भिन्न जोड़ने और घटाने की कल्पना करना

भाग 1: भिन्न जोड़ना

वर्ग आकार वाले कागज़ से विद्यार्थी इस गतिविधि को अधिक तेज़ी तथा अधिक सटीकता से कर पाएँगे। यह गतिविधि जोड़े में या छोटे समूहों में बेहतर कार्य करती है, ताकि विद्यार्थी आपस में अधिक विचार उत्पन्न कर सकें। सुनिश्चित करें कि समूह छोटे हों और आरेखण बड़े हों ताकि समूह में मौजूद सभी विद्यार्थी उसे देख सकें तथा उसमें भाग ले सकें। रंगीन पेंसिल और कैंची उपयोगी होती हैं लेकिन आवश्यक नहीं। इस गतिविधि का एक महत्वपूर्ण पहलू विद्यार्थियों को प्रत्येक भाग पर कार्य करने के लिए बहुत से समय की अनुमति देना है, ताकि उन्हें इसकी अच्छी समझ हो जाए कि उन्हें क्या करना है तथा भिन्न के कार्यों के बारे में सोचने, कल्पना करने और उसकी चर्चा करने के लिए पर्याप्त समय हो। इसका अर्थ विद्यार्थियों को इस गतिविधि में सभी कार्यों को करने के लिए कम से कम दो अध्याय देना हो सकता है।

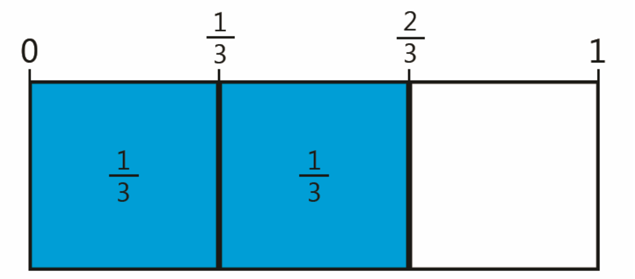
$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ (समान हर)

अपने विद्यार्थियों से कहें:

- 6 सेमी की लंबाई और 2 सेमी की ऊँचाई वाले तीन आयत बनाएँ
- पहले आयत में $\frac{1}{3}$ रंग भरें या शेड करें
- दूसरे आयत में $\frac{1}{3}$ रंग भरें या शेड करें
- दोनों रंगीन या शेड किए गए $\frac{1}{3}$ को काटकर उन्हें एक साथ तीसरे आयत में रखें जिससे ये $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ दिखाए।

वे इन आयतों का उपयोग करके $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ का उत्तर कैसे निकाल पाएँगे? उन्हें तरीका सोचने के लिए तीन या उससे अधिक मिनट दें।

कक्षा के साथ इसको हल करने के तरीके पर चर्चा करें। कुछ विद्यार्थियों को आकर ब्लैकबोर्ड पर अपने सुझाव बनाने के लिए कहें। एक समाधान चित्र 1 की तरह लग सकता है:



चित्र 1 दो भिन्नों को समान हर से जोड़ने का एक संभावित समाधान।

(शिक्षक के लिए नोट: अगर कोई कैंची या रंगीन पेंसिल उपलब्ध नहीं है, तो विद्यार्थी दोनों अंशों को एक आयत में आरेखित कर सकते हैं और दोनो अंशों को इंगित करने के लिए शेड का उपयोग कर सकते हैं।)

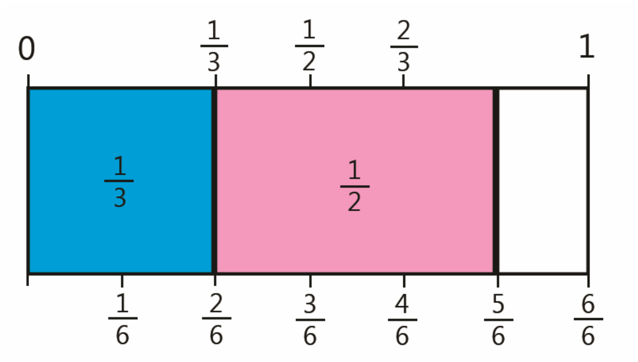
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ (समान हर)

- विद्यार्थियों से वही करने के लिए कहें जैसा उन्होंने $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, के साथ किया था लेकिन अब भिन्न $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ के लिए। सुनिश्चित करें कि वे एक ही आकार के आयतों का उपयोग करें क्योंकि वे इनका अगले प्रश्न में फिर से उपयोग करेंगे

$\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$ (अलग हर)

- विद्यार्थियों से अपने काटे हुए और शेड किए गए $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{2}$ को एक साथ तीसरे आयत में रखने के लिए कहें ताकि वह $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ दिखाए।
- विद्यार्थियों से पूछें कि वे इन आयतों का उपयोग करके कैसे $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ का उत्तर निकाल पाएँगे। उन्हें एक तरीका सोचने के लिए पाँच या उससे अधिक मिनट दें।
- पूरी कक्षा के साथ इसको हल करने के तरीके पर चर्चा करें। कुछ विद्यार्थियों को आकर ब्लैकबोर्ड पर अपने सुझाव बनाने के लिए कहें। आवश्यकता होने पर एक सुझाव दें कि सार्व हर (पूर्णांक कितने समान भागों में विभाजित किया गया है) के उपयोग से मदद मिल सकती है।

एक समाधान चित्र 2 की तरह लग सकता है:



चित्र 2 अलग अलग हर के साथ दो भिन्नों को जोड़ना एक संभावित समाधान।

अन्य भिन्न के जोड़

यही दृष्टिकोण अन्य भिन्न के जोड़ के लिए उपयोग की जा सकती है। इससे विद्यार्थियों को उस लंबाई वाले आयतों का उपयोग करने में मदद मिलती है, जो दो हरों के समापवर्त्य होते हैं। उदाहरण के लिए, $\frac{2}{4}+\frac{1}{8}$ को हल करने के लिए, 8 की लंबाई वाले आयत का उपयोग करें; $\frac{3}{7}+\frac{1}{2}$ का हल निकालने के लिए, 14 की लंबाई वाले आयत का उपयोग करें। विद्यार्थियों से आयत के आकार का सुझाव देने के लिए कहना, भिन्नों के जोड़ को समझने के प्रति एक महत्वपूर्ण चरण है।

भाग 2: भिन्नों को घटाना

आपके विद्यार्थियों को यह पता होना चाहिए कि घटाने का अर्थ ‘ले लेना’ होता है और ‘ले लेना’ भौतिक रूप से किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, 8 – 3, हमारे पास आठ चीज़ों का होना और उसमें से तीन ले लेना, इसके ही समान होता है। उसी प्रक्रिया का उपयोग करना जैसा भाग 1 में किया था $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ को आरेखित करके फिर उसमें से $\frac{1}{4}$ को मिटाकर दिखाया जा सकता है। अगर $\frac{3}{4}$ और $\frac{1}{4}$ के अंशों को काट दिया जाए, तो $\frac{3}{4}$ के अंश को $\frac{1}{4}$ के अंश से कवर किया जा सकता है और फिर विद्यार्थी कवर नहीं किए हुए भाग को हल कर सकते हैं। या अंश के ¾ भाग को अंश के भाग $\frac{1}{4}$ के समान माप के अनुसार काटा जा सकता है।

$\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$ (समान हर)

अपने विद्यार्थियों से कहें:

- 6 सेमी की लंबाई और 2 सेमी की ऊँचाई वाले तीन आयत बनाएँ
- पहले आयत में $\frac{2}{3}$ रंग भरें या शेड करें
- दूसरे आयत में $\frac{1}{3}$ रंग भरें या शेड करें
- रंगीन या शेड किए गए, दोंनो आंशिक टुकड़ों को काटना और उन्हें एक साथ इस तरह से तीसरे आयत में रखना जिससे कि वह $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$ दिखाए

वे इन आयतों का उपयोग करके $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$ का उत्तर कैसे निकाल पाएँगे? उन्हें तरीका सोचने के लिए तीन या उससे अधिक मिनट दें।

पूरी कक्षा के साथ इसको हल करने के तरीके पर चर्चा करें। कुछ विद्यार्थियों को आकर ब्लैकबोर्ड पर अपने सुझाव बनाने के लिए कहें।

$\frac{2}{2}-\frac{1}{2}$ (समान हर)

- विद्यार्थियों से वही करने के लिए कहें जैसा उन्होंने $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$, के साथ किया था लेकिन अब भिन्न $\frac{2}{2}-\frac{1}{2}$ के लिए। सुनिश्चित करें कि वे एक ही आकार के आयतों का उपयोग करें क्योंकि वे इनका अगले प्रश्न में फिर से उपयोग करेंगे।

- विद्यार्थियों के साथ चर्चा करें कि क्यों $\frac{2}{2}$ एक पूर्णांक के समान है।

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ (अलग हर)

विद्यार्थियों से उनके काटे गए और शेड किए गए $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{2}$ को तीसरे आयत में इस तरह से रखने के लिए कहें जिससे कि वह $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ दिखाए।

वे इन आयतों का उपयोग करके $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ का उत्तर कैसे निकाल पाएँगे? उन्हें एक तरीका सोचने के लिए पाँच या उससे अधिक मिनट दें।

कक्षा के साथ इसको हल करने के तरीके पर चर्चा करें। कुछ विद्यार्थियों को आकर ब्लैकबोर्ड पर अपने सुझाव बनाने के लिए कहें। आवश्यकता होने पर एक सुझाव दें कि सार्व हर (पूर्णांक कितने समान भागों में विभाजित किया गया है) के उपयोग से मदद मिल सकती है।

अन्य भिन्न के अंतर

यही दृष्टिकोण अन्य भिन्न के जोड़ के लिए उपयोग की जा सकती है। पहले की तरह, अगर विद्यार्थी ऐसी लंबाई वाले आयतों का उपयोग करते हैं, जो कि दो हरों का समापवर्त्य है, तो इससे उनकी समझ को विकसित करने में मदद मिलेगी और उनका ध्यान इस पर जाएगा। उदाहरण के लिए, $\frac{2}{4} - \frac{1}{8}$ को हल करने के लिए, 8 की लंबाई वाले आयत का उपयोग करें; $\frac{3}{7} - \frac{1}{3}$ का हल निकालने के लिए, 21 की लंबाई वाले आयत का उपयोग करें।

वीडियो: अध्याय नियोजन

केस स्टडी 1: श्रीमती मेहता, गतिविधि 1 के उपयोग का अनुभव बताती हैं

यह उस अध्यापिका की कहानी है जिसने अपनी प्राथमिक कक्षा के विद्यार्थियों के साथ गतिविधि 1 को आज़माया था।

मैं गणितीय आघात के बारे में पढ़कर थोड़ा सहम गयी थी – मेरे ध्यान में ऐसे कई विद्यार्थी आए जो संभवतः इसका अनुभव कर रहे होंगे। मैं इस बात को भी स्वीकार करना चाहूँगी कि आज तक मैं इस बात पर विश्वास करती थी कि कुछ विद्यार्थियों को 'यह समझ' आता है और अन्यों को नहीं। शायद ऐसा इसलिए है क्योंकि मुझे खुद कभी भी गणित को लेकर परेशानी नहीं हुई और कभी भी गणित को वाकई में एक नकारात्मक तरीके से नहीं देखा – बस यही जानती थी कि वह कभी-कभी कठिन हो सकता है।

इसलिए इस गतिविधि को शुरू करने से पहले मैंने खुद से यह वादा किया कि मैं वाकई में विद्यार्थियों को उनके खुद की विधियों और दृष्टिकोण के साथ आगे आने के लिए, भले ही वे पूरी तरह से सही न हो, पर्याप्त समय और अवसर देकर उनकी सहायता करूँगी – और उसमें हस्तक्षेप नहीं करूँगी या उन्हें बस तरीका नहीं बता दूँगी।

मुझे ऐसा लगा था कि इस गतिविधि में उन्हें शामिल करने के लिए बहुत से संकेत और सहायता देने की आवश्यकता होगी लेकिन वे सभी तुरंत इसे करने लगे। विद्यार्थियों ने चार या पाँच के समूहों में कार्य किया। प्रत्येक समूह के लिए पर्याप्त कैंची नहीं थी, लेकिन विद्यार्थियों ने खुशी-खुशी उसे साथ-मिलकर, समूह से समूह उसे पास करके कार्य किया। मैंने पाया कि उन्होंने इस दौरान वास्तव में एक दूसरे के कार्य पर एक नज़र डाला – और इस तरीके से एक दूसरे के तरीकों को अपनाया भी।

उन्होंने बड़ी आसानी से एक सार्व हर के साथ भिन्नों को जोड़ने का नियम निकाल लिया। एक अलग हर के साथ भिन्नों को जोड़ने की विधि ढूँढना इससे कठिन था और इसके लिए हमें वास्तव में पूरी कक्षा के साथ दो चर्चाएँ करनी पड़ी। पहली चर्चा में, पाँच मिनट के बाद, मैं समतुल्य भिन्नों और 3/6, ½ के बराबर होता है आदि के बारे में बात करने लगी। विचार करने के बाद मैं इस चीज़ को लेकर खुश नहीं थी कि मैंने उन्हें उसके बारे में बता दिया – लेकिन फिर मैंने सोचा कि उन्होंने इस अवधारणा को पिछले अध्याय 'समतुल्य भिन्न' से समझा था। बस उन्होंने इस शिक्षण को याद नहीं किया था। उन्हें इसकी याद दिलाने के बाद, मैंने उन्हें उत्तरों पर कार्य करने के लिए और दस मिनट दिए, लेकिन मैंने इसके साथ उनसे एक से अधिक उत्तर देने के लिए कहा। पूरी कक्षा के साथ दूसरी चर्चा के दौरान, हमने यह साझा किया कि $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} = \frac{10}{12} = \frac{15}{18}$ होता है और मुझे लगता है कि विद्यार्थियों को समतुल्य भिन्नों के बारे में बहुत कुछ समझ में आया।

शायद भिन्न जोड़ते समय उन गहन चर्चाओं के परिणामस्वरूप उन्होंने इतनी जल्दी भिन्न को घटाने का नियम निकाल लिया और वे इस पर अच्छा तर्क दे सके कि उन्हें एक सार्व हर की आवश्यकता क्यों है। हम इस बात पर भी चर्चा करने लगे कि आपको अंत में ऋणात्मक भिन्न क्यों प्राप्त होता है।

विचार के लिए रुकें

श्रीमती मेहता के अध्याय में भिन्नों के कार्यों को समझने में विद्यार्थियों की सहायता करने के लिए प्रभावी ढंग से कल्पना का उपयोग किया गया हैं। हालाँकि, किसी अध्याय के अच्छी तरह से समाप्त होने पर भी ऐसे कुछ विद्यार्थी होते हैं जो अभी भी पूरी तरह से यह नहीं समझ पाते कि गणित के कौन से तरीके पढ़ाए जा रहे हैं। श्रीमती मेहता के अध्याय पर विचार करें, तो विद्यार्थियों के सीखने को मॉनिटर करने और उन्हें फीडबैक देने के लिए अध्याय कौन-कौन से अवसर प्रदान करता है? इस बारे में विचार करने में मदद के लिए आप संसाधन 2, 'मॉनिटर करना और फीडबैक देना' पर एक नज़र डालना चाहेंगे।

आपके शिक्षण अभ्यास के बारे में सोचना

अपनी कक्षा के साथ ऐसा कोई अभ्यास करने के बाद यह सोचें कि क्या ठीक रहा और कहाँ गड़बड़ी हुई। ऐसे प्रश्न सोचें जिनसे विद्यार्थियों में रुचि पैदा हो तथा उनके बारे में उन्हें समझाएँ ताकि वे उन्हें हल करके आगे बढ़ सकें। ऐसे चिंतन से वह 'स्क्रिप्ट' मिल जाती है, जिसकी मदद से आप विद्यार्थियों के मन में गणित के प्रति रुचि जगा सकते हैं और उसे मनोरंजक बना सकते हैं। अगर विद्यार्थियों को समझ में नहीं आ रहा है और वे कुछ नहीं कर पा रहे हैं, तो इसका मतलब है कि उनकी इसमें सम्मिलित होने की रुचि नहीं है। जब भी आप गतिविधियाँ करें, इस विचार करने वाले अभ्यास का उपयोग करें, ध्यान दें, जैसे श्रीमती मेहता ने कुछ छोटी–छोटी चीज़ें कीं, जिनसे काफी फर्क पड़ा।

विचार के लिए रुकें

ऐसे चिंतन को गति देने वाले अच्छे प्रश्न निम्नलिखित हैं:

- आपकी कक्षा में इसका प्रदर्शन कैसा रहा?
- विद्यार्थियों से किस प्रकार की प्रतिक्रिया अनपेक्षित थी? क्यों?
- अपने विद्यार्थियों की समझ का पता लगाने के लिए आपने क्या सवाल किए?
- क्या आपको लगा कि आपको किसी समय हस्तक्षेप करना होगा? किस विद्यार्थी को सहायता चाहिए थी?
- क्या आपको लगा कि विद्यार्थियों को अपनी समझ विकसित करने के लिए पर्याप्त समय दिया गया था या उनमें से कुछ को इस प्रकार की गतिविधि करने के लिए आगे अतिरिक्त अवसरों की आवश्यकता है?
- क्या आपने कार्य में किसी भी तरीके का संशोधन किया? अगर हाँ, तो इसके पीछे आपका क्या कारण था?

3 समझने में मदद के लिए भिन्नों का गुणा करने और उन्हें विभाजित करने को पढ़ना

जब आप किसी पाठ्यपुस्तक में गणितीय सवालों को देखते हैं, तो वे चुनौतीपूर्ण लग सकते हैं। विद्यार्थियों को वे एक ऐसे अजीबो-गरीब चिह्न लग सकते हैं, जिनका कुछ अर्थ होना चाहिए था – एक ऐसा एहसास जिससे वे घबरा सकते हैं! यह भिन्नों पर कार्यों तक सीमित नहीं है। जब आप गणितीय चिह्नों के लेखन और अर्थ को समझना शुरू करते हैं, तब ये उदाहरण अर्थपूर्ण लगने लगते हैं।

भिन्नों का गुणा करने या उन्हें विभाजित करने के लिए कहे जाने पर, काल्पनिक रूप से इसका वास्तव में क्या अर्थ होगा यह सोचना, जोड़ने और घटाने की तुलना में और भी कठिन होता है। विद्यार्थियों के मन से भिन्नों का गुणा करने या उन्हें विभाजित करने के प्रतीकात्मक संकेतन से घबराहट के एहसास को हटाने का एक तरीका, गणितीय कथन को अलग तरह से कैसे पढ़ें इस बारे में सोचना है।

उदाहरण के लिए $\frac{1}{3} \times \frac{1}{6}$ के योग को इस रूप में पढ़ा जा सकता है:

- 'एक तिहाई बार एक बटा छह'
- 'एक तिहाई गुणा एक बटा छह'
- 'एक बटा छह का एक तिहाई।'

इसी तरह से, '$\frac{1}{3} \div \frac{1}{6}$' को इस रूप में पढ़ा जा सकता है:

- 'एक तिहाई विभाजित एक बटा छः से'
- 'एक तिहाई *को* एक बटा छह' के बीच बांटा गया
- 'एक तिहाई में *कितना* छठा भाग *होता है*?'

गणित की खूबसूरती इसी में है कि गणित कथनों को पढ़ने के लिए *आपके लिए* कौन सा तरीका सबसे अच्छा कार्य करता है, इसका निर्णय आप कर सकते हैं। इसके बाद आप गणितीय प्रश्नों को हल करने – उत्तर ढूँढने का सबसे सरल तरीका चुन सकते हैं।

'एक बटा छह का एक तिहाई' और 'एक तिहाई में कितना छठा हिस्सा होता है?' अभिव्यक्तियाँ भिन्नों का गुणा करने या उन्हें विभाजित करने का एक काल्पनिक चित्र बनाने के लिए अधिक सरल होते हैं। अगली गतिविधि विद्यार्थियों से इसकी खोज करने के लिए कहती है।

गतिविधि 2: भिन्नों का गुणा करने और उन्हें विभाजित करने का चित्रण

गतिविधि 1 के लिए इस गतिविधि के प्रत्येक भाग को पूरा करने के लिए विद्यार्थियों को पर्याप्त समय देना महत्वपूर्ण होता है।

भाग 1: एक शब्दकोश बनाना

विद्यार्थियों से निम्न गणितीय कथन कहकर उनसे इसकी चर्चा करने और उनसे जितना संभव हो उतने अलग अलग तरीके लिखने के लिए कहें:

- 2×3
- 7×8
- $\frac{1}{4} \times 4$
- $\frac{1}{5}$
- $\frac{1}{5} \times \frac{1}{10}$

उनमें से कुछ उत्तर निम्न हो सकते हैं:

- '... बार ...'
- '... गुणा ...'
- '... का ...'
- '... में कई सारे ...'

विद्यार्थियों से निम्न के लिए भी यही करने के लिए कहें:

- $6 \div 3$
- $8 \div 4$
- $6 \div \frac{1}{2}$
- $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4}$

ब्लैकबोर्ड पर उत्तर लिखें और इस गतिविधि के अगले भागों के लिए उसे वहीं रहने दें। उनमें से कुछ उत्तर निम्न हो सकते हैं:

- '... से भाग किया ...'
- '... के बीच बाँटा गया ...'
- '... में कितने ... हैं?'

भाग 2: भिन्नों के गुणन का चित्रण

गतिविधि के इस भाग में, आप अपने विद्यार्थियों को जोड़ों में या समूहों में कार्य करने के लिए कहेंगे। योजना में मदद के लिए, आपको संसाधन 3, 'जोड़े वाले कार्य का उपयोग करना' देखना चाहिए।

ब्लैकबोर्ड पर इस गतिविधि के पिछले भाग से उत्तरों के आगे निम्न गुणन को लिखें:

- $\frac{1}{2} \times 3$
- $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$
- $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$
- $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$
- $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$
- $\frac{2}{5} \times \frac{2}{4}$

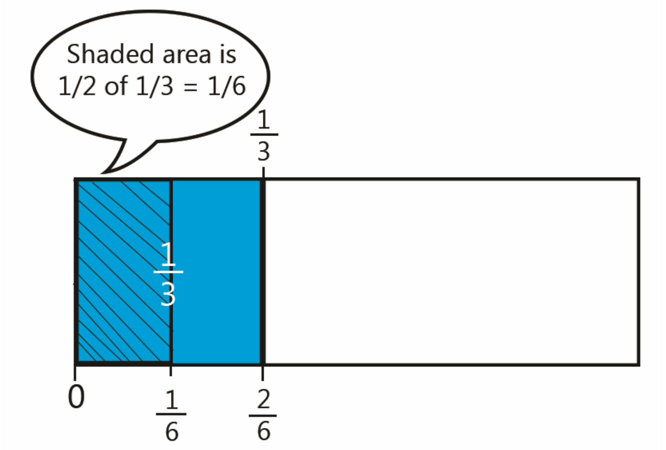
अब निम्न करें:

- विद्यार्थियों को जोड़ों में या समूहों में कार्य करने के लिए कहें और एक चित्र बनाएँ जो इन गुणन को 6 सेमी की लंबाई और 2 सेमी की ऊँचाई वाले एक आयत में दिखाएगा – जैसा उन्होंने गतिविधि 1 में किया था। उन्हें इंगित करें कि ब्लैकबोर्ड पर अभी भी मौजूद भाग 1 के उत्तर उनकी मदद कर सकते हैं।

- उन्हें बताएँ कि दस मिनट में उनके विचार पूरी कक्षा के साथ साझा किए जाएँगे और ज़रूरी नहीं कि वे सभी उदाहरणों को पूरा कर लें।
- दस मिनट के बाद, उनके विचारों की चर्चा करें और कुछ विद्यार्थियों से आकर ब्लैकबोर्ड पर उनके चित्र बनाने के लिए कहें।
- किसी भी गलत अवधारणाओं पर चर्चा करें।
- फिर विद्यार्थियों से सभी उदाहरणों के लिए चित्र बनाने के लिए कहें।
- अगर वे जल्दी समाप्त कर लें, तो उनसे अपने खुद के कुछ उदाहरण बनाने के लिए कहें।

(शिक्षक के लिए नोट: इन गुणन के चित्र बनाने के लिए, विद्यार्थी इन्हें '... में से ...' के रूप में देखते हैं। इसलिए उदाहरण के लिए, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ के लिए, विद्यार्थी पहले अपने आयत के $\frac{1}{3}$ में शेड करेंगे और फिर 'मुझे इसका आधा हिस्सा ढूँढना है' कहेंगे, इस प्रकार से शेड किए गए तीसरे हिस्से को आधा करेंगे। अगर उन्होंने गतिविधि 1 किया है, तो वे यह देख पाएँगे कि आयत के $\frac{1}{6}$ के बराबर है।)

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ का समाधान चित्र 3 के जैसा दिखाई दे सकता है:



चित्र 3 किसी अलग हर के साथ दो भिन्नों का गुणा करने का एक संभावित समाधान।

भाग 3: भिन्नों के भाग का चित्रण

तैयारी

इस गतिविधि के लिए भिन्न पट्टियाँ बहुत उपयोगी होती हैं। आपको संसाधन 4 में कुछ उदाहरण रिक्त आंशिक पट्टियों के मिल सकते हैं। आप विद्यार्थियों से इन पट्टियों द्वारा प्रतिनिधित्व किए जाने वाले भिन्नों को लिखने के लिए कह सकते हैं।

गतिविधि

ब्लैकबोर्ड पर इस गतिविधि के पिछले भाग से उत्तरों के आगे निम्न भाग योग लिखें:

- $8 \div 4$
- $8 \div \frac{1}{2}$
- $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4}$
- $\frac{1}{2} \div \frac{1}{2}$
- $\frac{1}{4} \div \frac{1}{8}$

फिर भाग 2 की ही तरह आरेखण पूरा करें।

(शिक्षक के लिए नोट: भिन्न को एक भिन्न से विभाजित कैसे करते हैं, इसकी कल्पना करना कठिन है। याद रखने वाली महत्वपूर्ण चीज़ यह है कि भाग के कई अर्थ होते हैं, लेकिन इस स्थिति में आप पूछ रहे हैं कि '... में कितने ... हैं?' इसलिए $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$ के लिए, आप पूछ रहे हैं कि एक $\frac{1}{4}$ में कितने $\frac{1}{2}$ हैं। एक वर्ग या आयत बनाएँ, उसे ½ में विभाजित करें और इन आधे हिस्सों में से एक को काट कर अलग कर लें। वही वर्ग या आयत बनाएँ, उन्हें तिहाईयां में विभाजित करके काटकर हटाएँ। आधे हिस्से में कितनी तिहाईयां होती हैं? आसान है – दो होती हैं! योग $\frac{2}{3}$ बटे $\frac{1}{6}$ को उसी तरह से हल किया जा सकता है, जिस तरीके से $\frac{3}{4}$ बटे $\frac{3}{12}$ जैसे थोड़े कठिन योग को हल किया जा सकता है। लेकिन जल्द ही आपके पास ऐसे भिन्न भाग के योग नहीं बचेंगे जिनकी आसानी से कल्पना की जा सकती है। हालाँकि, विद्यार्थियों को अब भिन्नों के भाग की अवधारणाओं की कुछ समझ हो गई होगी और वे अपने प्रक्रियात्मक ज्ञान का उपयोग अधिक कठिन योग के लिए कर सकते हैं।)

वीडियो: सभी को शामिल करना

केस स्टडी 2: श्री पाण्डेय गतिविधि 2 का उपयोग करने पर विचार व्यक्त करते हैं

जब मेरे इतने सारे विद्यार्थी भिन्नों के गुणन और भाग के नियमों में उलझ जाते हैं, विशेष रूप से परीक्षा के समय में, तो मैं हतोत्साहित हो जाता हूँ। कुछ विद्यार्थियों को उसे करने का तरीका याद रहता है, लेकिन कई को नहीं। इसलिए मैंने इस गतिविधि को करने का निर्णय लिया। क्योंकि भिन्नों के गुणन और भाग की कल्पना करना मेरे लिए नया था, पहले मैंने खुद ही और फिर घर पर मेरी बहन के साथ इन प्रश्नों को किया। मैं इन्हें करके बहुत उत्साहित हो गया और फिर इस गतिविधि को स्कूल में मेरे दो सहकर्मियों के साथ किया। इसलिए जब मैंने विद्यार्थियों के साथ इसे आज़माया, मुझे पता था कि क्या हो सकता है।

खुद से प्रयास करने से मैंने यह जाना कि मुझे प्रयोग करने और भिन्नों को बनाने, रंगने और काटने के लिए कुछ समय और अवसर चाहिए। इसलिए जब मैंने अपने विद्यार्थियों के साथ यह किया, मैंने यह सुनिश्चित किया कि मैं उन्हें ऐसा करने के लिए पर्याप्त समय दूँ और जल्दबाज़ी नहीं करने दूँ। मुझे लगता है कि अपने दिमाग में कोई छवि बनाने में समय लगता है, विशेष रूप से तब जब वह आपके लिए नया हो।

विद्यार्थियों को यह जानकर राहत महसूस होती दिखी कि भिन्नों का गुणा करने और उन्हें विभाजित करने का वास्तव में कुछ अर्थ होता है – यह कि आप उसके अर्थ को देख सकते हैं तथा उसके अर्थ को कह सकते हैं। इससे मुझे यह ज्ञात हुआ कि गणितीय संकेतन और गणितीय प्रतीक 'सामान्य' पाठ से अलग होते हैं और गणितीय संकेतों को सीखने, पढ़ने और उनकी व्याख्या करने पर ज़्यादा ध्यान नहीं दिया गया।

गतिविधि में मौजूद सभी भागों के लिए, विद्यार्थियों ने जोड़े में काम किया। मुझे लगा कि वह प्रयोग करने के लिए अच्छा कार्य करेगा और विद्यार्थियों को शांति से स्वयं के लिए सोचने के लिए कुछ समय देगा।

मैंने आंशिक पट्टियों का उपयोग किया [संसाधन 4 देखें]। क्योंकि स्कूल में हमारे पास फ़ोटोकॉपियर नहीं है और मैं इतने सारे विद्यार्थियों के लिए आंशिक पट्टियाँ नहीं बना सकता – मेरी कक्षा में 80 से अधिक बच्चे हैं – मैंने इसे करना तय किया और प्रत्येक विद्यार्थियों से एक रात पहले घर पर अपने अभ्यास पुस्तक के कागज़ से इन्हें बनाने के लिए कहा। बेशक, उनमें से कई ऐसा करना या उसे लाना भूल गए, लेकिन हमारे पास काफ़ी पट्टियाँ हो गई थीं, जिससे कि विद्यार्थियों के प्रत्येक जोड़े के लिए आंशिक पट्टियों का कम से कम एक सेट था।

कक्षा में ऐसी दो लड़कियाँ थीं, जिनको लेकर मैं पहले थोड़ा चिंतित था – वे हमेशा से गणित को लेकर इतनी चिंतित रहती थीं कि, कभी भी हाथ खड़ा नहीं करती थी और हमेशा देखती थीं कि दूसरे क्या कर रहे हैं। मैंने उनसे इस गतिविधि में एक साथ एक जोड़ी के रूप में काम करने के लिए कहा। पहले वे बिल्कुल भी गतिविधि नहीं कर रही थीं और अन्य विद्यार्थियों को देख रही थीं कि वे क्या कर रहे हैं। लेकिन लगभग चार मिनट के बाद उन्होंने गतिविधि करना शुरू की और एक दूसरे से बात भी करने लगीं। वे सहज महसूस करती दिखने लगीं। पूरी कक्षा के साथ की जाने वाली चर्चा में मैंने उनमें से एक से उनके विचारों के बारे में पूछा और उन्होंने उसका उत्तर दिया, हालाँकि बहुत ही शांत आवाज़ में। पहला कदम!

विचार के लिए रुकें

- विद्यार्थियों से किस प्रकार की प्रतिक्रिया अनपेक्षित थी? क्यों?
- अपने विद्यार्थियों की समझ का पता लगाने के लिए आपने क्या सवाल किए?
- क्या किसी भी समय आपको ऐसा लगा कि हस्तक्षेप करना चाहिए?
- क्या आपने कार्य में किसी भी तरीके का संशोधन किया? अगर हाँ, तो इसके पीछे आपका क्या कारण था?

4 सारांश

इस इकाई ने आपको कल्पना के तकनीकों का उपयोग करने के तरीकों के बारे में सोचने के लिए प्रोत्साहित किया है। कल्पना, विद्यार्थियों की, प्रत्येक कार्य में क्या हो रहा है उनके द्वारा यह देखे या कल्पना किए जाने के तरीके प्रदान करके जोड़, घटाव, गुणन और भाग जैसे भिन्नों पर कार्यों के प्रति समझ विकसित करने में मदद करता है।

कल्पना करने के तरीके विकसित करने से विद्यार्थियों को कई क्षेत्रों में – न कि केवल भिन्न – गणितीय अंकनों का अर्थ समझने में मदद मिलती है। ये विचार महत्वपूर्ण हैं, क्योंकि कई विद्यार्थियों के लिए गणित सीखना इतना डरावना लगता है कि वे इसके बारे में सोचना ही नहीं चाहते हैं। इस डर से उभरने में समय और दृढ़ विश्वास की ज़रूरत होगी, लेकिन यह सुनिश्चित करना कि आपके विद्यार्थी इस इकाई में वर्णित तरीकों के जैसे तरीकों का उपयोग करके अपने अध्यायों में शामिल होते हैं, यह सुनिश्चित करने में मदद करेगा कि आपके विद्यार्थियों को यह विश्वास है कि वे गणित कर *सकते* हैं।

विचार के लिए रुकें

- आपके द्वारा इस इकाई में उपयोग किए गए उन विचारों की पहचान करें, जो अन्य विषयों को पढ़ाने में कारगर होंगे। उन दो विषयों पर अब एक नोट तैयार करें, जिन्हें आप जल्द ही पढ़ाने वाले हैं, जहाँ थोड़े-बहुत समायोजन के साथ उन अवधारणाओं का उपयोग किया जा सकता है।

संसाधन

संसाधन 1: एनसीएफ/एनसीएफटीई शिक्षण आवश्यकताएँ

यह यूनिट NCF (2005) तथा NCFTE (2009) की निम्न शिक्षण आवश्यकताओं से जोड़ता है तथा उन आवश्यकताओं को पूरा करने में आपकी मदद करेगा:

- शिक्षार्थियों को उनके शिक्षण में सक्रिय प्रतिभागी के रूप में देखें न कि सिर्फ ज्ञान प्राप्त करने वाले के रूप में; ज्ञान निर्माण के लिए उनकी क्षमताओं को कैसे प्रोत्साहित करें; रटने वाली पद्धतियों से शिक्षण को दूर कैसे ले जाएँ।
- विद्यार्थियों को महत्वपूर्ण गणित सीखने दें और देखें कि गणित, सूत्रों और यांत्रिक प्रक्रियाओं से कहीं ज़्यादा है।

संसाधन 2: निगरानी करना और फीडबैक देना

विद्यार्थियों के निष्पादन में सुधार करने में निरंतर निगरानी और उन्हें जवाब देना शामिल है, ताकि वे जान सकें कि उनसे क्या उम्मीद की जा रही है और उन्हें अपना काम पूरा करने के बाद प्रतिक्रिया प्राप्त हो। वे रचनात्मक प्रतिक्रिया के ज़रिए अपने निष्पादन में सुधार कर सकते हैं।

निगरानी

प्रभावी शिक्षक अधिकांश समय अपने विद्यार्थियों की निगरानी करते हैं। आम तौर पर, अधिकांश शिक्षक विद्यार्थियों को सुनते हुए और कक्षा में उनके कार्य को देखते हुए निगरानी रखते हैं। विद्यार्थियों की प्रगति की निगरानी करना महत्वपूर्ण है क्योंकि इससे उन्हें निम्न में मदद मिलती है:

- उच्च ग्रेड प्राप्त करना
- अपने निष्पादन के बारे में अधिक जागरूक और अपने शिक्षण में अधिक जिम्मेदार रहना
- अपने शिक्षण में सुधार करना
- राज्य और स्थानीय मानकीकृत परीक्षा में उपलब्धि का अनुमान लगाना।

एक शिक्षक के रूप में आपको यह निम्न बातें तय करने में भी सहायता करती है:

- कब प्रश्न पूछना चाहिए या कब सहायता करनी चाहिए
- कब प्रशंसा करनी चाहिए
- चुनौती देनी चाहिए या नहीं
- किसी कार्य में विभिन्न समूहों के विद्यार्थियों को किस प्रकार शामिल करना चाहिए
- ग़लतियों का क्या करना चाहिए।

विद्यार्थियों में सबसे ज्यादा सुधार तब होता है जब उनकी प्रगति के बारे में उन्हें स्पष्ट और फ़ौरन प्रतिक्रिया दी जाती है। निगरानी का उपयोग आपको नियमित प्रतिक्रिया देने, आपके विद्यार्थियों को यह बताने में मदद करता है कि वे किस प्रकार निष्पादन कर रहे हैं और उनके शिक्षण को उन्नत करने के लिए और क्या करने की ज़रूरत है।

आप जिन चुनौतियों का सामना करेंगे उनमें से एक है विद्यार्थियों को स्वयं अपने शिक्षण लक्ष्य निर्धारित करने में मदद करना, जो स्वतः निगरानी भी कहलाता है। विद्यार्थी, विशेषकर जो अभी आगे बढ़ने की कोशिश कर रहे हैं, अपने स्वयं के शिक्षण की जिम्मेदारी उठाने के अभ्यस्त नहीं होते हैं। लेकिन आप परियोजना के लिए स्वयं अपने लक्ष्य या ध्येय निर्धारित करने, अपने काम की योजना बनाने और समय-सीमा निर्धारित करने, और अपनी प्रगति पर खुद निगरानी रखने में किसी भी विद्यार्थी की मदद कर सकते हैं। स्वतः निगरानी की प्रक्रिया को व्यवहार में लाना और उस कौशल में महारत हासिल करना उनके लिए स्कूल में और जीवन भर खूब काम आएगा।

विद्यार्थियों को ध्यान से सुनना और देखना

शिक्षकों द्वारा अधिकांश समय विद्यार्थियों को स्वाभाविक रूप से सुना या ग़ौर किया जाता है; यह निगरानी रखने का एक सरल साधन है। उदाहरण के लिए, आप:

- अपने विद्यार्थियों को ज़ोर से पढ़ते हुए सुन सकते हैं
- जोड़े या समूह कार्य में चर्चाओं को सुन सकते हैं
- बाहर या कक्षा में संसाधनों का उपयोग करते हुए विद्यार्थियों को देख सकते हैं
- काम करते समय समूहों के हाव-भाव पर ग़ौर कर सकते हैं।

सुनिश्चित करें कि आपके द्वारा एकत्रित अवलोकन विद्यार्थियों के शिक्षण या प्रगति के सच्चे प्रमाण हैं। केवल वही प्रलेखित करें जिसे आप देख सकते हैं, सुन सकते हैं, उचित सिद्ध कर सकते हैं या जिस पर भरोसा कर सकते हैं।

जब विद्यार्थी कार्य कर रहे हों, कक्षा में चारों ओर चहलक़दमी करें ताकि संक्षिप्त अवलोकन नोटस तैयार कर सकें। आप यह दर्ज करने के लिए कक्षा सूची का उपयोग कर सकते हैं कि किस विद्यार्थी को अधिक मदद की ज़रूरत है, और उसमें किन्हीं उभरती ग़लतफ़हमियों को भी नोट कर सकते हैं। आप पूरी कक्षा को प्रतिक्रिया देने के लिए या समूहों को अथवा व्यक्ति विशेष को प्रेरित और प्रोत्साहित करने के लिए इन अवलोकनों और नोटस का उपयोग कर सकते हैं।

प्रतिक्रिया देना

प्रतिक्रिया वह जानकारी है जो एक विद्यार्थी को किसी कथित लक्ष्य या प्रत्याशित परिणाम के सम्बन्ध में उसके द्वारा किए गए कार्य के बारे में दी जाती है। प्रभावी प्रतिक्रिया से विद्यार्थियों को मिलता है:

- क्या हुआ इस बारे में जानकारी
- मूल्यांकन कि कोई कार्रवाई या कार्य कितनी अच्छी तरह निष्पादित किया गया
- मार्गदर्शन कि उनके निष्पादन में किस प्रकार सुधार लाया जा सकता है

जब आप प्रत्येक विद्यार्थी को प्रतिक्रिया देते हैं, तो उससे उन्हें यह जानने में मदद मिलनी चाहिए कि:

- वास्तव में वे क्या कर सकते हैं
- वे अभी क्या नहीं कर सकते हैं
- उनका कार्य औरों की तुलना में कैसा है
- वे किस प्रकार सुधार कर सकते हैं।

यह याद रखना महत्वपूर्ण है कि प्रभावी प्रतिक्रिया विद्यार्थियों की मदद करती है। आप इस कारण से शिक्षण को बाधित नहीं करना चाहेंगे कि आपकी प्रतिक्रिया अस्पष्ट या अनुचित थी। प्रभावी प्रतिक्रिया:

- किए जाने वाले कार्य और विद्यार्थी के शिक्षण पर **केंद्रित** होती है
- **स्पष्ट और सच्ची** होती है, जो विद्यार्थियों को बताती है कि उनके सीखने की प्रक्रिया में क्या ठीक है और कहाँ सुधार करने की आवश्यकता है
- **कार्रवाई योग्य** होती है, जो विद्यार्थियों को वह करने के लिए कहती है जिसे करने में वे सक्षम हों
- उपयुक्त भाषा **में दी जाती है** जिसे विद्यार्थी समझ सकें
- सही समय **पर दी जाती है** – यदि वह जल्दी दी जाए, तो विद्यार्थी सोचेंगे कि 'मैं बस वही करने वाला था!'; बहुत देर से दी जाए, तो विद्यार्थी का ध्यान तब तक किसी और बात पर भटक गया होगा और वह वापस जाकर उस काम को नहीं कर पाएगा जिसे करने के लिए कहा गया है।

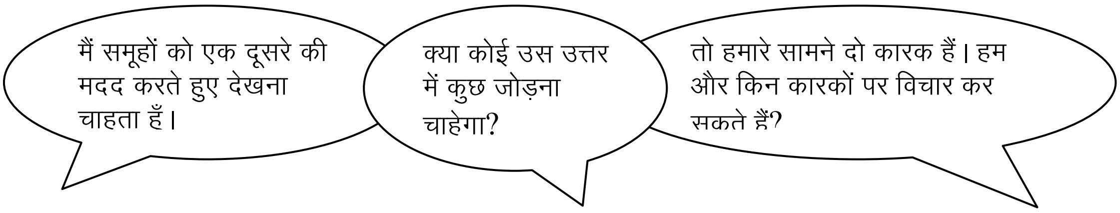
प्रतिक्रिया चाहे मौखिक रूप से दी जाए या विद्यार्थी को वर्क-बुक में लिखकर दी जाए, वह अधिक प्रभावी होती है यदि उसे निम्नलिखित दिशा-निर्देशों का पालन करते हुए दी जाए।

प्रशंसा और सकारात्मक भाषा का उपयोग करते हुए जब हमारी प्रशंसा की जाती है और हमें प्रोत्साहित किया जाता है, तो आमतौर पर हम उसके मुकाबले काफी बेहतर महसूस करते हैं, जब हमारी आलोचना की जाती है या हमारी गलती सुधारी जाती है। सुदृढ़ीकरण और सकारात्मक भाषा समूची कक्षा और सभी उम्र के व्यक्तियों के लिए प्रेरणादायक होती है। याद रखें कि प्रशंसा विशिष्ट होनी चाहिए और विद्यार्थियों के बजाय उनके काम को लक्षित किया जाना चाहिए, अन्यथा वह विद्यार्थी की प्रगति में सहायक नहीं होगी। 'शाबाश' सुनिर्दिष्ट प्रतिक्रिया नहीं है, इसके बजाय निम्न में से कोई एक कहना बेहतर होगा:

संकेत देने के साथ-साथ सुधार का उपयोग करना

आप अपने विद्यार्थियों के साथ जो संवाद करते हैं उससे उन्हें सीखने में मदद मिलती है। यदि आप उनसे कहते हैं कि कोई उत्तर ग़लत है और वहीं संवाद को ख़त्म कर देते हैं, तो आप उन्हें सोचने और स्वयं प्रयास करने में मदद करने का अवसर खो देते हैं। यदि आप विद्यार्थियों को कोई संकेत देते हैं या उनसे एक और सवाल पूछते हैं, तो आप उन्हें गहराई से सोचने में मदद करते हैं और उन्हें जवाब खोजने तथा स्वयं अपने शिक्षण की जिम्मेदारी लेने के लिए प्रोत्साहित करते हैं। उदाहरण के लिए, आप निम्न जैसी बातें कह कर बेहतर जवाब के लिए प्रोत्साहित कर सकते हैं या प्रश्न के लिए दूसरा कोण सुझाने में मदद कर सकते हैं:

हो सकता है कि दूसरे विद्यार्थियों को परस्पर मदद करने के लिए प्रोत्साहित करना उपयुक्त हो। आप निम्न टिप्पणियों के साथ बाक़ी कक्षा के सामने अपने प्रश्न रखते हुए ऐसा कर सकते हैं:



'हाँ' या 'नहीं' कहकर विद्यार्थियों की ग़लती सुधारना, वर्तनी या संख्या अभ्यास जैसे कामों में उपयुक्त हो सकता है लेकिन यहाँ भी आप विद्यार्थियों को अपने उत्तर में उभरने वाले पैटर्न पर नज़र डालने में मदद कर सकते हैं, समान उत्तरों से संबंध जोड़ सकते हैं या कोई उत्तर ग़लत क्यों है, इस बारे में चर्चा शुरू कर सकते हैं।

स्वसुधार और साथी द्वारा सुधार प्रभावी होता है और आप जोड़ों में कार्य या नियत-कार्य करते समय स्वयं अपने और एक दूसरे के कार्य की जाँच करने के लिए विद्यार्थियों को कहकर ऐसा कर सकते हैं। एक समय में ठीक करने के लिए एक पहलू पर ध्यान केंद्रित करना सबसे अच्छा होता है ताकि भ्रमित करने वाली ढेर सारी जानकारी न हो।

संसाधन 3: जोड़े में किये गये कार्य का उपयोग करना

दैनिक स्थितियों में लोग काम करते हैं, और साथ-साथ दूसरो से बोलते हैं और उनकी बात सुनते हैं, तथा देखते हैं कि वे क्या करते हैं और कैसे करते हैं। लोग इसी तरह से सीखते हैं। जब हम दूसरों से बात करते हैं, तो हमें नए विचारों और जानकारियों का पता चलता है। कक्षाओं में अगर सब कुछ शिक्षक पर केंद्रित होता है, तो अधिकतर विद्यार्थियों को अपनी पढ़ाई को प्रदर्शित करने के लिए या प्रश्न पूछने के लिए पर्याप्त समय नहीं मिलता। कुछ विद्यार्थी केवल संक्षिप्त उत्तर दे सकते हैं और कुछ बिल्कुल भी नहीं बोल सकते। बड़ी कक्षाओं में, स्थिति और भी बदतर है, जहां बहुत कम विद्यार्थी ही कुछ बोलते हैं।

जोड़े में कार्य का उपयोग क्यों करें?

जोड़े में कार्य विद्यार्थियों के लिए ज्यादा बात करने और सीखने का एक स्वाभाविक तरीका है। यह उन्हें विचार करने और नए विचारों तथा भाषा को कार्यान्वित करने का अवसर देता है। यह विद्यार्थियों को नए कौशलों और संकल्पनाओं के माध्यम से काम करने और बड़ी कक्षाओं में भी अच्छा काम करने का सुविधाजनक तरीका प्रदान करता है।

जोड़े में कार्य करना सभी आयु वर्गों और लोगों के लिए उपयुक्त होता है। यह विशेष तौर पर बहुभाषी, बहुग्रेड कक्षाओं में उपयोगी होता है, क्योंकि एक दूसरे की सहायता करने के लिए जोड़ों को बनाया जा सकता है। यह सर्वश्रेष्ठ तब काम करता है जब आप विशिष्ट कार्यों की योजना बनाते हैं और यह सुनिश्चित करने के लिए विशिष्ट प्रक्रियाओं की स्थापना करते हैं कि आपके सभी विद्यार्थी शिक्षण में शामिल हैं और प्रगति कर रहे हैं। एक बार इन विशिष्ट प्रक्रियाओं को स्थापित करने के बाद, आपको पता लगेगा कि विद्यार्थी तुरंत जोड़ों में काम करने के अभ्यस्त हो जाते हैं और इस तरह सीखने में आनंद लेते हैं।

जोड़े में कार्य करने के लिए काम

जोड़े में कार्य करने के लिए काम

आप शिक्षण के अभीष्ट परिणाम के आधार पर विभिन्न प्रकार के कामों का जोड़े में कार्य करने के लिए उपयोग कर सकते हैं। जोड़े में कार्य को अवश्य ही स्पष्ट और उपयुक्त होना चाहिए ताकि सीखने में अकेले काम करने के मुकाबले साथ मिलकर काम करने में अधिक मदद मिले। अपने विचारों के बारे में बात करके, आपके विद्यार्थी स्वतः खुद को और विकसित करने के बारे में विचार करेंगे।

जोड़े में कार्य करने में शामिल हो सकते हैं:

- **'विचार करें-जोड़ी बनाए-साझा करें':** विद्यार्थी किसी समस्या या मुद्दे के बारे में खुद ही विचार करते हैं और फिर दूसरे विद्यार्थियों के साथ अपने उत्तर साझा करने से पूर्व संभावित उत्तर निकालने के लिए जोड़ों में कार्य करते हैं। इसका उपयोग वर्तनी, परिकलनों के जरिये कामकाज, प्रवर्गों या क्रम में चीजों को रखने, विभिन्न दृष्टिकोण प्रदान करने, कहानी आदि का पात्र होने का अभिनय करने आदि के लिए किया जा सकता है।
- **जानकारी साझा करना:** आधी कक्षा को विषय के एक पहलू के बारे में जानकारी दी जाती है; और शेष आधी कक्षा को विषय के भिन्न पहलू के बारे में जानकारी दी जाती है। फिर वे समस्या का हल निकालने के लिए या निर्णय करने के लिए अपनी जानकारी को साझा करने के लिए जोड़ो में कार्य करते हैं।
- **सुनने जैसे कौशलों का अभ्यास करना:** एक विद्यार्थी कहानी पढ़ सकता है और दूसरा प्रश्न पूछता है; एक विद्यार्थी अंग्रेजी में पैसेज पढ़ सकता है, जबकि दूसरा इसे लिखने का प्रयास करता है; एक विद्यार्थी किसी तस्वीर या डायाग्राम का वर्णन कर सकता है जबकि दूसरा विद्यार्थी वर्णन के आधार पर इसे बनाने की कोशिश करता है।
- **निम्नलिखित निर्देश:** एक विद्यार्थी कार्य पूरा करने के लिए दूसरे विद्यार्थी हेतु निर्देश पढ़ सकता है।
- **कहानी सुनाना या रोल–प्ले :** विद्यार्थी जो भाषा वे सीख रहे हैं, उसमें कहानी या संवाद बनाने के लिए जोड़ों में कार्य कर सकते हैं।

सभी को शामिल करते हुए जोड़ों का प्रबंधन करना

जोड़े में कार्य करने का अर्थ सभी को काम में शामिल करना है। चूंकि विद्यार्थी भिन्न होते हैं, इसलिए जोड़ों का प्रबंधन इस तरह से करना चाहिए कि प्रत्येक को जानकारी हो कि उन्हें क्या करना है, वे क्या सीख रहे हैं और आपकी अपेक्षाएं क्या हैं। अपनी कक्षा में जोड़े में कार्य को विशिष्ट बनाने के लिए, आपको निम्नलिखित काम करने होंगे:

- उन जोड़ों का प्रबंधन करना जिनमें विद्यार्थी काम करते हैं। कभी-कभी विद्यार्थी मैत्री जोड़ों में काम करेंगे; कभी-कभी वे काम नहीं करेंगे। सुनिश्चित करें कि उन्हें बोध है कि आप उनके सीखने की प्रक्रिया को अधिकतम करने में सहायता करने के लिए जोड़ें तय करेंगे।
- अधिकतम चुनौती पेश करने के लिए, कभी-कभी आप मिश्रित योग्यता वाले और भिन्न भाषायी विद्यार्थियों के जोड़े बना सकते हैं ताकि वे एक दूसरे की मदद कर सकें; किसी समय आप एक स्तर पर काम करने वाले विद्यार्थियों के जोड़े बना सकते हैं।
- रिकॉर्ड रखें ताकि आपको अपने विद्यार्थियों की योग्यताओं का पता हो और आप उसके अनुसार उनके जोड़े बना सकें।
- आरंभ में, विद्यार्थियों को पारिवारिक और सामुदायिक संदर्भों से उदाहरण लेकर, जहां लोग सहयोग करते हैं, जोड़े में काम करने के फायदे बताएं।
- आरंभिक कार्य को संक्षिप्त और स्पष्ट रखें।
- यह सुनिश्चित करने के लिए कि विद्यार्थी जोड़े ठीक वैसे ही काम कर रहे हैं जैसा आप चाहते हैं, उन पर नजर रखें।
- विद्यार्थियों को उनके जोड़े में उनकी भूमिकाएं या जिम्मेदारियां प्रदान करें, जैसे कि किसी कहानी से दो पात्र, या साधारण लेबल जैसे '1' और '2', या 'क' और 'ख')। यह कार्य उनके एक दूसरे का सामना करने से पूर्व करें ताकि वे सुनें।
- सुनिश्चित करें कि विद्यार्थी एक दूसरे के सामने बैठने के लिए आसानी से मुड़ या घूम सकें।

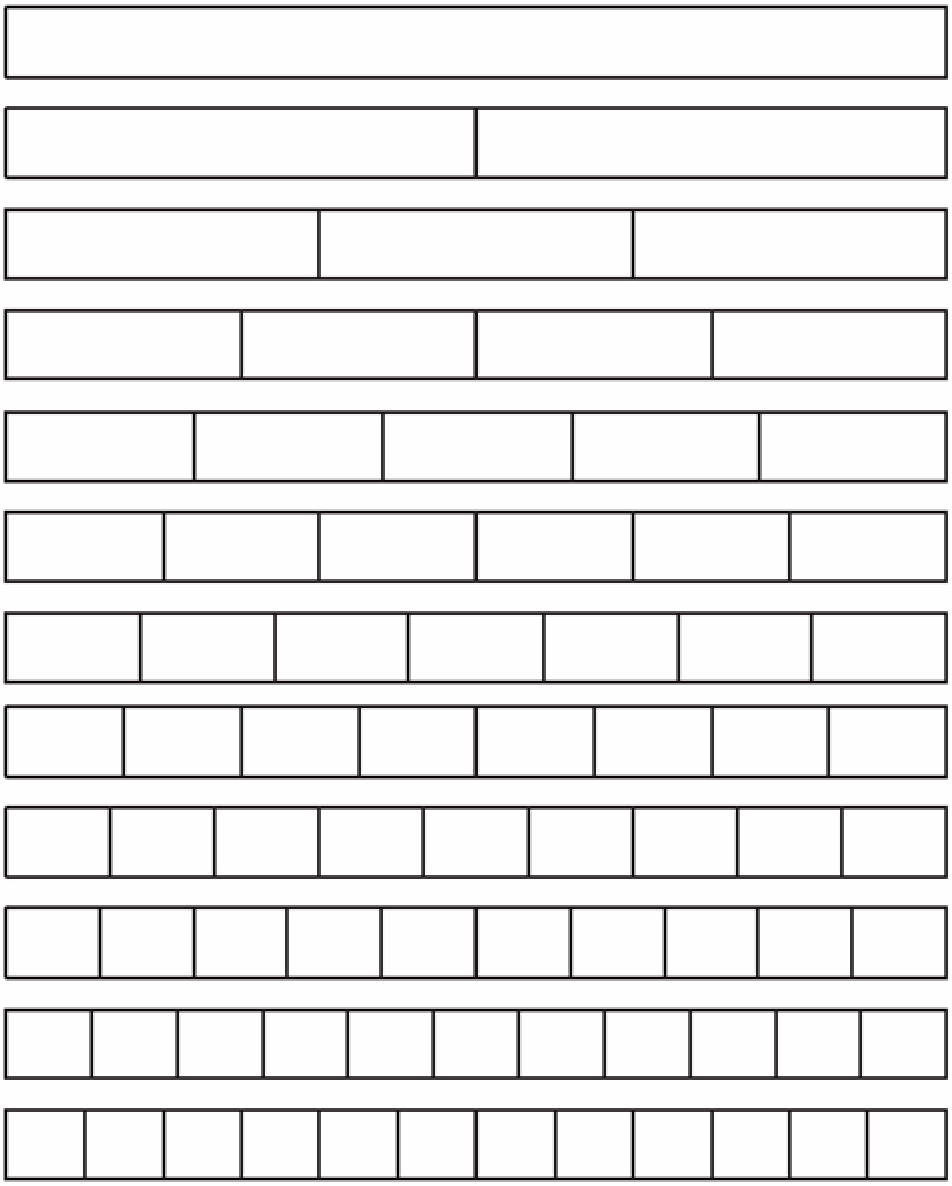
जोड़े में कार्य के दौरान, विद्यार्थियों को बताएं कि उनके पास प्रत्येक काम के लिए कितना समय है और उनकी नियमित जांच करते रहें। उन जोड़ों की प्रशंसा करें जो एक दूसरे की मदद करते हैं और काम पर बने रहते हैं। जोड़ों को आराम से बैठने और अपने खुद के हल ढूंढने का समय दें – विद्यार्थियों को विचार करने और अपनी योग्यता दिखाने से पूर्व ही जल्दी से उनके साथ शामिल होने का प्रलोभन हो सकता है। अधिकांश विद्यार्थी एक दूसरे के बात करने और काम करने के वातावरण का आनंद लेते हैं। जब आप कक्षा में देखते हुए और सुनते हुए घूम रहे हों तो नोट बनाएं कि कौन से विद्यार्थी एक साथ आराम में हैं, हर उस विद्यार्थी के प्रति सचेत रहें जिसे शामिल नहीं किया गया है, और किसी भी सामान्य गलतियों, अच्छे विचारों या सारांश के बिंदुओं को नोट करें।

कार्य के समाप्त होने पर आपकी भूमिका उनके बीच की कड़ियां जोड़ने की है जिनको विद्यार्थियों ने बनाया है। आप कुछ जोड़ों का चुनाव उनका काम दिखाने के लिए कर सकते हैं, या आप उनके लिए इसका सार प्रस्तुत कर सकते हैं। विद्यार्थियों को एक साथ काम करने पर उपलब्धि की भावना का एहसास करना पसंद आता है। आपको हर जोड़े से रिपोर्ट लेने की जरूरत नहीं है – इसमें काफी समय लगेगा - लेकिन आप उन विद्यार्थियों का चयन करें जिनके बारे में आपको अपने अवलोकन से पता है कि वे कुछ सकारात्मक योगदान करने में सक्षम होंगे और जिससे दूसरों को सीखने को मिलेगा। यह उन विद्यार्थियों के लिए एक अवसर हो सकता है जो आमतौर पर अपना विश्वास कायम करने हेतु योगदान करने में संकोच करते हैं।

यदि आपने विद्यार्थियों को हल करने के लिए समस्या दी है, तो आप कोई नमूना उत्तर भी दे सकते हैं और फिर उनसे जोड़ों में उत्तर में सुधार करने के संबंध में चर्चा करने के लिए कह सकते हैं। इससे अपने खुद के शिक्षण के बारे में विचार करने और अपनी गलतियों से सीखने में उनकी सहायता होगी।

यदि आप जोड़े में कार्य करने के लिए नए हैं, तो उन बदलावों के संबंध में नोट बनाना महत्वपूर्ण है जिन्हें आप कार्य, समयावधि या जोड़ों के संयोजनों में करना चाहते हैं। यह महत्वपूर्ण है क्योंकि आप इसी तरह सीखेंगे और इसी तरह अपने अध्यापन में सुधार करेंगे। जोड़े में कार्य का सफल आयोजन करना स्पष्ट निर्देशों और उत्तम समय प्रबंधन के साथ-साथ संक्षिप्त सार संक्षेपण से जुड़ा है – यह सब अभ्यास से आता है।

संसाधन 4: भिन्न पट्टियाँ



चित्र R4.1 भिन्न पट्टियाँ।

अतिरिक्त संसाधन

- A newly developed maths portal by the Karnataka government: http://karnatakaeducation.org.in/KOER/en/index.php/Portal:Mathematics
- National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics: https://www.ncetm.org.uk/
- National STEM Centre: http://www.nationalstemcentre.org.uk/
- National Numeracy: http://www.nationalnumeracy.org.uk/home/index.html
- BBC Bitesize: http://www.bbc.co.uk/bitesize/
- Khan Academy's math section: https://www.khanacademy.org/math
- NRICH: http://nrich.maths.org/frontpage
- Art of Problem Solving's resources page: http://www.artofproblemsolving.com/Resources/index.php
- Teachnology: http://www.teach-nology.com/worksheets/math/
- Math Playground's logic games: http://www.mathplayground.com/logicgames.html
- Maths is Fun: http://www.mathsisfun.com/
- Coolmath4kids.com: http://www.coolmath4kids.com/
- National Council of Educational Research and Training's textbooks for teaching mathematics and for teacher training of mathematics: http://www.ncert.nic.in/ncerts/textbook/textbook.htm

- AMT-01 *Aspects of Teaching Primary School Mathematics*, Block 1 (‘Aspects of Teaching Mathematics’), Block 2 (‘Numbers (I)’), Block 3 (‘Numbers (II)’), Block 4 (‘Fractions’): http://www.ignou4ublog.com/2013/06/ignou-amt-01-study-materialbooks.html
- LMT-01 *Learning Mathematics*, Block 1 (‘Approaches to Learning’) Block 2 (‘Encouraging Learning in the Classroom’), Block 4 (‘On Spatial Learning’), Block 5 (‘Exploring Numbers’), Block 6 (‘Thinking Mathematically’): http://www.ignou4ublog.com/2013/06/ignou-lmt-01-study-materialbooks.html
- *Manual of Mathematics Teaching Aids for Primary Schools*, published by NCERT: http://www.arvindguptatoys.com/arvindgupta/pks-primarymanual.pdf
- *Learning Curve* and *At Right Angles*, periodicals about mathematics and its teaching: http://azimpremjifoundation.org/Foundation_Publications
- Textbooks developed by the Eklavya Foundation with activity-based teaching mathematics at the primary level: http://www.eklavya.in/pdfs/Catalouge/Eklavya_Catalogue_2012.pdf
- Central Board of Secondary Education’s books and support material (also including *List of Hands-on Activities in Mathematics for Classes III to VIII*) – select ‘CBSE publications’, then ‘Books and support material’: http://cbse.nic.in/welcome.htm

संदर्भ/संदर्भग्रंथ सूची

Boaler, J. (2009) What’s Math Got to Do With It? How Parents and Teachers Can Help Children Learn to Love Their Least Favourite Subject. New York, NY: Penguin.

Dörfler, W. (1991) ‘Meaning: image schemata and protocols: plenary lecture’ in Furinghetti, F. (ed.) *Proceedings of PME XV, Vol. I*, pp. 95–126.

Fazio, L. and Siegler, R.(2011) ‘Teaching fractions’, Educational Practices Series – 22, UNESCO International Bureau of Education.

Lange, T. and Meaney, T. (2011) ‘I actually started to scream: emotional and mathematical trauma from doing school mathematics homework’, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 77, no. 1, pp. 35–51.

National Council of Educational Research and Training (2005) *National Curriculum Framework (NCF)*. New Delhi: NCERT.

National Council of Educational Research and Training (2009) *National Curriculum Framework for Teacher Education (NCFTE)*. New Delhi: NCERT.

Van Hiele, P. (1986) Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education. Orlando, FL: Academic Press.

Watson, A., Jones, K. and Pratt, D. (2013) *Key Ideas in Teaching Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

अभिस्वीकृतियाँ

यह सामग्री क्रिएटिव कॉमन्स एट्रिब्यूशन-शेयरएलाइक लाइसेंस (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/) के अंतर्गत उपलब्ध कराई गई है, जब तक कि अन्यथा निर्धारित न किया गया हो। यह लाइसेंस TESS-India, OU और UKAID लोगो के उपयोग को वर्जित करता है, जिनका उपयोग केवल TESS-India परियोजना के भीतर अपरिवर्तित रूप से किया जा सकता है।

कॉपीराइट के स्वामियों से संपर्क करने का हर प्रयास किया गया है। यदि किसी को अनजाने में अनदेखा कर दिया गया है, तो पहला अवसर मिलते ही प्रकाशकों को आवश्यक व्यवस्थाएं करने में हर्ष होगा।

वीडियो (वीडियो स्टिल्स सहित): भारत भर के उन अध्यापक शिक्षकों, मुख्याध्यापकों, अध्यापकों और विद्यार्थियों के प्रति आभार प्रकट किया जाता है जिन्होंने उत्पादनों में दि ओपन यूनिवर्सिटी के साथ काम किया है।