

गणित में अनुमान लगाना और सामान्यीकरण:  
बीजगणित का परिचय



भारत में विद्यालय आधारित  
समर्थन के माध्यम से शिक्षक  
शिक्षा

[www.TESS-India.edu.in](http://www.TESS-India.edu.in)



<http://creativecommons.org/licenses/>



## संदेश



शिक्षकों को बाल केंद्रित कक्षा अभ्यास की ओर उन्मुख करने तथा शिक्षक प्रशिक्षण की गुणवत्ता को बेहतर बनाने के उद्देश्यों को सम्मुख रखते हुए TESS-India राष्ट्रीय स्तर पर कार्यरत है। इस दिशा में TESS-India द्वारा मुक्त शैक्षिक संसाधन (Open Educational Resources) का विकास किया गया है। ये संसाधन शिक्षकों तथा शिक्षक-प्रशिक्षकों के वृत्ति विकास (Professional development) में लाभकारी एवं उपयोगी सिद्ध होंगे। राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद, बिहार के नेतृत्व में इन संसाधनों का स्थानीयकृत किया गया है, जिसके अन्तर्गत इनके उद्देश्य के मूल को बरकरार रखते हुए इनमें स्थानीय, भाषा, बोली, प्रथाओं, संस्कृतियों तथा नियमों को सम्मिलित किया गया है। इनका उपयोग शिक्षण कार्य में सहजता एवं सुगमता पूर्वक किया जा सकता है।

राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद, बिहार के मार्गदर्शन में TESS-India द्वारा स्थानीय भाषा में तैयार मुक्त शैक्षिक संसाधन (Open Educational Resources) नेट पर आप सभी के लिए सुलभ उपलब्ध है।

शुभकामनाओं सहित।

(डॉ० मुरली मनोहर सिंह)

निदेशक

एस०सी०ई०आर०टी०, बिहार

समीक्षा एवं दिशाबोध
डॉ. मुरली मनोहर सिंह, निदेशक राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार
डॉ. सैयद अब्दुल मोईन, विभागाध्यक्ष, अध्यापक शिक्षा विभाग, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार
डॉ. कासिम खुशीद, विभागाध्यक्ष, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्
डॉ. इम्तियाज आलम, विभागाध्यक्ष, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार
डॉ. स्नेहाशीष दास राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार
डॉ. अर्चना, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार
डॉ. रीता राय, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार
श्री तेज नारायण प्रसाद, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार

स्थानीयकरण
<b>भाषा और शिक्षा</b>
डॉ. ज्ञानदेव मणि त्रिपाठी, प्राचार्य, मैत्रेय कॉलेज ऑफ एडुकेशन एण्ड मैनेजमेंट, हाजीपुर, वैशाली
श्री सुमन सिंह, प्रखंड साधनसेवी, भगवानपुर हाट, सिवान
श्री कात्यायान कुमार त्रिपाठी, प्राथमिक विद्यालय चैलीटाल, पटना
श्री कृत प्रसाद, प्रखंड साधनसेवी, हिलसा, नालंदा
<b>प्राथमिक अंग्रेजी</b>
श्री अरशद रजा, सहायक शिक्षक, प्राथमिक विद्यालय, पचासा रहुई, नालंदा
श्री संतोष सुमन, सहायक शिक्षक, बालिका उच्च विद्यालय, महुआबाग
श्री शशि भूषण पाण्डेय, सहायक शिक्षक, उत्कर्मित मध्य विद्यालय, मुकुन्दपुर, नालंदा
श्रीमती रचना त्रिवेदी, शिक्षिका, नोट्रेडेम अकादमी, पटना
<b>माध्यमिक अंग्रेजी</b>
श्री मणिशंकर, प्रधानाध्यापक, तारामणी भगवानसाव उच्च माध्यमिक विद्यालय, कोइलवर, भोजपुर
डॉ. ब्रजेश कुमार, शिक्षक, पी. एन. एंग्लो संस्कृत माध्यमिक विद्यालय, नया टोला, पटना
<b>प्राथमिक गणित</b>
श्री कृष्ण कान्त ठाकुर
श्री दिलीप कुमार, संकुल संसाधन केन्द्र समन्वयक, बुलनी हैदरपुर, नालंदा
श्री गोविन्द प्रसाद, प्रखंड साधनसेवी, चनपटिया, पश्चिमी चम्पारण
<b>माध्यमिक गणित</b>
डॉ. राकेश कुमार, भागलपुर डायट
श्री रिजवान रिजवी, उत्कर्मित मध्य विद्यालय, सिलौटा चाँद, कैमूर
श्री इन्द्रभूषण कुमार, शिक्षक, सहयोगी माध्यमिक विद्यालय, हाजीपुर, वैशाली
<b>प्राथमिक विज्ञान</b>
श्री मनोज त्रिपाठी, प्रखंड साधनसेवी, बरहारा, भोजपुर
श्री शशिकान्त शर्मा, प्रखंड साधनसेवी, आरा, भोजपुर
श्री रणबीर सिंह, संकुल संसाधन केन्द्र समन्वयक, आदर्श आवासीय मध्य विद्यालय शिक्षक संघ, सहरसा
<b>माध्यमिक विज्ञान</b>
श्री जी.वी.एस.आर प्रसाद
श्री मुकुल कुमार, शिक्षक, सहायक शिक्षक, गोरखनाथ सूर्यदेव माध्यमिक विद्यालय, राजापाकर वैशाली


**TESS-India (Teacher Education Through School Based Support)** का लक्ष्य है भारत में मुक्त शैक्षिक संसाधनों के द्वारा प्राथमिक और माध्यमिक स्तरों पर शिक्षकों के कक्षा अभ्यासों को बेहतर करना। ये संसाधन शिक्षकों के छात्र-केन्द्रित, भागीदारी दृष्टिकोण को विकसित करने में सहायता करेंगे।

**TESS-India** के मुक्त शैक्षिक संसाधन (**Open Education Resources – OERs**) शिक्षकों को स्कूल की पाठ्यपुस्तक के लिए सहायक पुस्तिका प्रदान करते हैं। ये संसाधन शिक्षकों के लिए गतिविधियाँ प्रदान करते हैं जो वे कक्षा में अपने छात्रों के साथ कर सकते हैं। साथ ही इनमें केस स्टडी भी हैं जो ये दर्शाते हैं कि किस प्रकार दूसरे शिक्षकों ने उस विषय को सिखाया है। संबंधित संसाधन शिक्षकों को पाठ योजना बनाने में और विषय पर ज्ञान वर्धन करने में उनकी सहायता करते हैं।

**TESS-India** के मुक्त शैक्षिक संसाधन भारतीय पाठ्यक्रम और संदर्भों के अनुकूल हैं। ये भारतीय तथा अंतर्राष्ट्रीय लेखकों के सहयोग से तैयार किये गये हैं और ये ऑनलाइन तथा प्रिंट उपयोग के लिए उपलब्ध है (<http://www.tess-india.edu.in>)। मुक्त शैक्षिक संसाधन अनेकों संस्करणों में उपलब्ध हैं जो प्रत्येक राज्य के लिए उपयुक्त है जहाँ TESS India कार्यरत है। उपयोगकर्ता इन संसाधनों को अनुकूल और स्थानीयकृत करने के लिए स्वतंत्र हैं ताकि ये स्थानीय आवश्यकताओं और संदर्भों को पूरा कर सकें।

**TESS-India** मुक्त विश्वविद्यालय, ब्रिटेन के नेतृत्व में तथा ब्रिटेन की सरकार द्वारा वित्त-पोषित है।

### वीडियो संसाधन

इस इकाई की कुछ गतिविधियों के साथ निम्न प्रतीक का उपयोग किया गया है:  . इससे संकेत मिलता है कि निर्दिष्ट अध्यापन संबंधी थीम के लिए TESS-India वीडियो संसाधनों को देखना आपके लिए उपयोगी होगा।

**TESS-India** वीडियो संसाधन भारत में अनेक प्रकार की कक्षाओं के संदर्भ में मुख्य अध्यापन तकनीकों का वर्णन करते हैं। हमें आशा है कि वे आपको इसी प्रकार के अभ्यासों के साथ प्रयोग करने के लिए प्रेरित करेंगे। उनका उद्देश्य पाठ (टेक्स्ट) पर आधारित इकाइयों के माध्यम से काम करने के आपके अनुभव का पूरक होना और उसे बढ़ाना है।

**TESS-India** वीडियो संसाधनों को ऑनलाइन देखा या TESS-India की वेबसाइट, [http://www.tess-india.edu.in/](http://www.tess-india.edu.in) से डाउनलोड किया जा सकता है। वैकल्पिक रूप से, आप ये वीडियो सीडी या मेमोरी कार्ड के माध्यम से भी देख सकते हैं।

संस्करण 2.0 EM13v1

Bihar

तृतीय पक्षों की सामग्रियों और अन्यथा कथित को छोड़कर, यह सामग्री क्रिएटिव कॉमन्स एट्रिब्यूशन-शेयरएलाइक लाइसेंस के अंतर्गत उपलब्ध कराई गई है।  
<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>

TESS-India is led by The Open University UK and funded by UK aid from the UK government

## यह इकाई किस बारे में है

बीजगणित ऐसा विषय है जहाँ कई छात्र-छात्रा यह कहने लगते हैं कि गणित कठिन है। इसके कई कारण हो सकते हैं; युवा छात्र-छात्राओं को चीजें सीधी और ठोस पसंद आती हैं, जबकि बीजगणित चर और मानकों को दर्शानेवाले अमूर्त चिह्नों के बारे में होता है। हालाँकि कई कठिनाइयाँ इसलिए होती हैं, कि छात्र-छात्रा जिस तरह संख्याओं के साथ कार्य करते हैं और जिस तरह वे बीजगणित में कार्य करते हैं, उनमें अंतरों को स्पष्ट नहीं किया जाता है और इसलिए छात्र-छात्रा शुरुआत में ही दुविधा में पड़ जाते हैं।

इस इकाई में आप इसके बारे में सोचेंगे कि बीजगणित से परिचय कैसे किया जाए और छात्र-छात्राओं को भ्रम या दुविधा में डाले बिना बीजगणितीय तरीके से सोचने में मदद करने के लिए किन-किन भिन्नताओं को ढूँढा यानी अन्वेषण किया जाए। गतिविधियों में छात्र-छात्राओं को संख्याओं को सुरक्षित रूप से इस्तेमाल करते हुए बीजगणितीय उपायों के साथ कार्य करने के लिए कहा जाता है। वे दो महत्वपूर्ण बीजगणितीय विचारों, अनुमान लगाने और सामान्यीकरण करने के प्रति अपनी सोच को विकसित करेंगे।

दो गतिविधियों में कार्ड का अलग अलग तरीके से उपयोग करके छात्र-छात्राओं को बीजगणितीय उपायों का अन्वेषण करने और उन उपायों को उनकी खुद की सोच में विस्तारित करने के लिए प्रेरित किया जाता है। गतिविधियों की एक और विषयगत योजना है यह पता लगाना कि जो उनके सामने प्रस्तुत किया गया है वह हमेशा सत्य है, कभी-कभी सत्य है या गलत है।

## आप इस इकाई में सीख सकते हैं

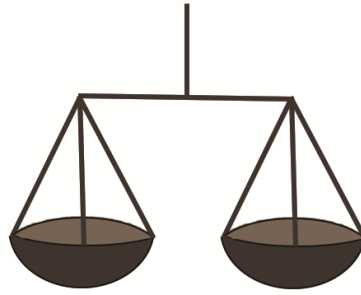
- अपने छात्र-छात्राओं को अंकगणित और बीजगणित के बीच के अंतरों को समझने में कैसे मदद प्रदान करें।
- छात्र-छात्राओं को बीजगणितीय रूप से सोचने में सक्षम करने के लिए अनुमान और सामान्यीकरण का उपयोग करने से संबंधित सुझाव।
- कुछ विधियाँ, जो छात्र-छात्राओं को खुद यह तय करने में कि कथन सही है या गलत सहायता करती है और साथ मिलकर गणित-संबंधी अन्वेषण करने में मदद करती हैं।

इस इकाई का संबंध NCF (2005) और NCFTE (2009) की दर्शाई गई शिक्षण आवश्यकताओं से है। संसाधन 1।

## 1 बीजगणित में बराबर का चिह्न

अंकगणित में, 'बराबर का चिह्न' अक्सर कोई क्रिया करने या उत्तर ढूँढने के एक आदेश के रूप में देखा जाता है। इसलिए, जब कोई छात्र किसी समीकरण में बराबर का चिह्न देखता है, तो वह उससे पहले दी गई संक्रिया को पूरा करने की सोच सकता है। कई छात्र-छात्राओं के लिए, बराबर चिह्न का अर्थ है –'और उत्तर है', जो कि बीजगणित करते समय सहायक नहीं होता है।

बराबर का चिह्न हमेशा दो व्यंजकों के बीच के रिश्ते को दर्शाता है। बराबर का चिह्न मात्रात्मक समानता दर्शाता है – दूसरे शब्दों में, बराबर चिह्न की बाईं ओर का व्यंजक वही मात्रा दर्शाता है जो दाईं ओर वाला व्यंजक दर्शाता है। बराबर के चिह्न को 'के समान है' या 'के समतुल्य है' या 'समान मूल्य का है' के रूप में पढ़ा जा सकता है। यह समझने पर, समीकरणों के साथ कार्य करते समय आपके छात्र-छात्राओं को मदद प्राप्त होगी।



चित्र 1: बराबर का चिह्न संतुलन दर्शाता है

‘बराबर का चिह्न संतुलन दर्शाता है’ की अवधारणा को समानता के विचार को दृढ़ करने के लिए उपयोग किया जा सकता है — कि संख्या वाक्य के दोनों पक्षों को समान होना चाहिए और समीकरण संतुलित होना चाहिए। प्रत्येक पैन में अलग-अलग रंग के ब्लॉक (या समान वजन की अन्य छोटी वस्तुएँ) के साथ सरल संतुलन दिखाने के लिए तराजू के एक सेट का उपयोग किया जा सकता है। वैकल्पिक रूप से, छड़ी या कोट हैंगर से लटके छोटे पैकेटों या डिब्बों से भरे थैले इस अवधारणा को दृश्य रूप से दर्शाएँगे।



### ज़रा सोचिए

- बराबर चिह्न के कुछ ऐसे उपयोगों के बारे में विचार करें, जो आपके छात्र-छात्राओं को उनके आसपास ही दिखाई दे सकते हैं जिसके कारण गलत व्याख्या या गलतफहमी हो सकती है। उदाहरण के लिए, बराबर चिह्न का कभी-कभी गणितीय समीकरणों के बाहर भी उपयोग किया जा सकता है, जैसे ‘ $MATHS = FUN$ ’ या ‘ $Ravi = 9$ ’।

## 2 बीजगणितीय रूप से विचार करना

बीजगणितीय रूप से विचार करना और स्कूल में बीजगणित के उपयोग में पैटर्न को पहचानना और उनका विश्लेषण करना, चिह्नों का उपयोग और सामान्यीकरण विकसित करना शामिल है। ‘अंकगणित की भाषा’ उत्तर पाने पर केंद्रित है, जबकि ‘बीजगणित की भाषा’ संबंधों पर केंद्रित है। उदाहरण के लिए, ‘ $a + 0 = a$ ’ उस सामान्यीकरण को प्रतीकों के रूप में दर्शाता है कि जब किसी संख्या में शून्य जोड़ा जाता है, तो वह अपरिवर्तित रहती है।

बीजगणित एक सामान्यीकृत संबंध को व्यक्त करने पर केन्द्रित रहता है, जबकि अधिकांश गणितीय पाठ उत्तर ढूँढने पर केंद्रित रहते हैं। इस प्रकार पहली चीज़ जो समझी जानी चाहिए, वो ये है कि बीजगणित, अंकगणित से एक अलग सोच है।

इस इकाई की गतिविधियाँ बीजगणितीय सोच के बारे में विचार विकसित करने पर कार्य करेगी:

- गतिविधि 1 में आपके छात्र-छात्राओं को संख्याओं के साथ खेलने के लिए और ऐसी अभिव्यक्ति बनाने के लिए प्रोत्साहित किया जाता है जो उन्हें बराबर के चिह्न को ‘उत्तर ढूँढें’ की बजाय ‘के समान है’ के अर्थ में देखने के लिए प्रेरित करती है।
- गतिविधि 2 छात्र-छात्राओं की बीजगणितीय सोच को विस्तारित करना आरंभ करती है, उन्हें यह अन्वेषण करने के लिए कहती है कि कोई कथन सच है या झूठ और यह अनुमान लगाने के लिए कहती है कि वह सदा सत्य है, कभी-कभी सच होता है या हमेशा गलत है।

- गतिविधि 3 में है सामान्यीकरण, जिसमें छात्र-छात्राओं को यह विचार करने के लिए प्रोत्साहित किया जाता है कि उनका अनुमान (या सद्धिांत) सारी संख्याओं के लिए काम करता है या नहीं। इसका अर्थ यह है कि वे संख्या के गुणों के बारे में बीजगणितीय रूप से सामान्यीकरण करना आरंभ करेंगे।

इस इकाई में अपने छात्र-छात्राओं के साथ गतिविधियों के उपयोग का प्रयास करने से पहले अच्छा होगा कि आप सभी गतिविधियों को पूरी तरह या आंशिक रूप से स्वयं करके देखें। यह और भी बेहतर होगा अगर आप अपने किसी सहकर्मी के साथ मिलकर इसे करने का प्रयास करें क्योंकि स्वयं के अनुभव के आधार पर सिखाना आसान होगा। स्वयं प्रयास करने से आपको किसी शिक्षा ग्रहण करने वाले व्यक्ति के अनुभव का ज्ञान होगा, जो आपके शिक्षण और एक शिक्षक के रूप में आपके अनुभवों को प्रभावित करेगा।

### गतिविधि 1: समानता का खेल

#### तैयारी

यह खेल एक दूसरे के साथ स्पर्धा करने वाले दो दलों के समूह के द्वारा खेला जाता है। तय करें कि आप अपनी कक्षा को दो टीमों के कितने समूहों में बाँटना चाहते हैं।

दो टीमों के हर समूह के लिए आपको निम्न की आवश्यकता होगी:

- 1 से 9 तक की संख्याओं में से हर एक के लिए दो नंबर कार्ड
- जोड़ने (+), घटाने (-), गुणा (×) और भाग (÷) के संक्रिया कार्ड – प्रत्येक के कई कार्ड
- बराबर के चिह्न (=) के लिए एक कार्ड।

कागज़ के एक बड़े टुकड़े पर वह संख्या लिखकर संख्या-कार्ड बनाया जा सकता है। आप कागज़ पर लिखने के लिए एक स्केच या मार्कर पेन का उपयोग कर सकते हैं ताकि उसकी स्याही इतनी गाढ़ी हो कि उसे सारे छात्र देख सकें।

छात्र-छात्राओं के घूमने के लिए आपको कुछ जगह की आवश्यकता पड़ेगी। यदि आपकी कक्षा में टेबलों और बेंचों को हटाकर पर्याप्त स्थान प्राप्त नहीं किया जा सकता, तो बाहर जाने के बारे में विचार करें। कक्षा को पुनर्गठित करके बनाएँ:

- संख्या कार्ड के साथ दो टीमों (A और B)।
- चार सदस्यों की एक परिचालन टीम जो 'संक्रिया' कार्ड पकड़कर रखेंगे।
- 'बराबर' कार्ड के साथ एक छात्र (जो प्रोसेसर 'बराबर' कहा जाएगा)।

#### खेल कैसे खेला जाता है

टीम A उसके किन्हीं दो सदस्यों और जोड़ने या घटाने की संक्रियाओं का उपयोग करके एक गणितीय अभिव्यक्ति बनाती है। उदाहरण के लिए:

$$9 + 8$$

$$7 - 4$$

प्रोसेसर बराबर फिर से आते हैं और टीम एक की अभिव्यक्ति के किसी भी सिरे पर खड़े हो जाते हैं।

फिर टीम B अपने सदस्यों की किसी भी संख्या को लेकर और बची हुई संक्रियाओं में से किसी एक को लेकर एक और अभिव्यक्ति बनाती है, जो टीम A द्वारा बनायी गयी अभिव्यक्ति के 'समान मूल्य' की है। टीम B के सदस्य प्रोसेसर बराबर के दूसरी ओर खड़े होते हैं।

उदाहरण के लिए, ऊपर टीम **A** द्वारा बनायी गयी दो अभिव्यक्तियों के सापेक्ष टीम **B** निम्न बना सकती है:

$$'9 + 8 = 19 - 2' \text{ या } '9 + 8 = 21 - 4', \text{ आदि।}$$

$$'7 - 4 = 6 \div 2' \text{ या } '7 - 4 = 9 - 6', \text{ आदि।}$$

यदि टीम **B** एक ऐसी अभिव्यक्ति बनाने में सफल रहती है जो कि टीम **A** द्वारा बनायी गयी अभिव्यक्ति के बराबर हो, तो उसे उसकी अभिव्यक्ति बनाने में उपयोग की गई सबसे बड़ी संख्या के बराबर पॉइंट मिलेंगे।

यदि टीम **B** एक ऐसी अभिव्यक्ति बनाने में विफल रहती है जो कि टीम **A** द्वारा बनायी गयी अभिव्यक्ति के बराबर हो, तो टीम **A** को उसकी अभिव्यक्ति बनाने में उपयोग की गई सबसे बड़ी संख्या के बराबर पॉइंट मिलेंगे।

अगली चाल के लिए टीम **B** पहले जाएगी। दोनों टीमों को समान संख्या में चालों की अनुमति है।

### केस स्टडी 1: श्रीमती अपराजिता समानता के खेल का उपयोग करने के बारे में बताती हैं

*यह एक शिक्षिका की कहानी है जिसने अपनी प्राथमिक कक्षा के छात्र-छात्राओं के साथ गतिविधि 1 करने का प्रयास किया।*

इस गतिविधि के लिए बहुत सारे प्रबंध करने की आवश्यकता थी और हम वास्तव में आरंभ कर सके इसके पहले काफी समय लगा। मैंने कुछ काफी तगड़े कार्ड लिए और इसकी मदद से कार्ड बनाए। गतिविधि पूर्ण होने पर मैंने उन्हें एक साथ एकत्रित किया और उन्हें एक सुरक्षित स्थान पर रख दिया, ताकि बाद में फिर उपयोग कर सकूँ।

मेरी एक सहकर्मी मीना ने मुझे उन कार्डों को रखते देखा और मुझसे उनके बारे में पूछा। जब मैंने उसे गतिविधि के बारे में बताया, तो उसने कहा कि वह भी उनका उपयोग करना चाहेगी, तो उनका अब तक दो बार उपयोग हो चुका है और जिससे उन्हें बनाने में लगा समय और भी उपयुक्त लगता है। अगली बार जब मैं कार्ड का उपयोग करूँगी – और मैं जरूर करूँगी क्योंकि छात्र उससे इतना कुछ सीखे थे – तो मीना और मैं मिलकर कार्ड बनाने का काम करेंगे।

पाठ से पहले हमें तालिकाओं को हटाना पड़ा ताकि हमारे पास खाली स्थान रहे, लेकिन हमारा समय लगाना व्यर्थ नहीं गया। असल में सभी छात्र-छात्राओं को गतिविधि में बड़ा मज़ा आया और उन्होंने मेरे विचार से बराबर के चिह्न के बारे में बहुत कुछ सीखा।

आरंभ में मैंने उन्हें दस-दस छात्र-छात्राओं की दो टीमों की मदद से खेल समझाया लेकिन मैंने पहले ही तय कर लिया था कि मुझे दो की जगह चार टीमें बनानी पड़ेंगी, क्योंकि मेरी कक्षा में बहुत से छात्र थे, अन्यथा कई छात्र इसमें शामिल नहीं हो पाते थे। मैंने चार छात्र-छात्राओं को मूल्यांकनकर्ता के रूप में भी नियुक्त किया था जो छात्र-छात्राओं के हर समूह द्वारा बनायी गयी अभिव्यक्तियों का मूल्यांकन करेंगे और देखेंगे कि वे सही हैं या नहीं और स्कोर रखने के लिए दो छात्र नियुक्त किये गये। कक्षा के अलग-अलग सिरों पर टीम **A** टीम **B** के साथ खेली और टीम **C** टीम **D** के साथ खेली और फिर उन्होंने जगह बदल ली।

मैंने देखा कि टीम **B** में कुछ गहन सोच रखने वाले छात्र थे। उन्होंने अधिक अंक पाने और दूसरी टीम को बाहर रखने के लिए हमेशा सबसे बड़ी संख्याओं का उपयोग करने का फैसला किया। बेशक इसका अर्थ था कि उन्हें उनकी बड़ी संख्याओं के साथ काफी कठिन अंकगणित करना पड़ा था। उनको खुद को चुनौती देना उनका ही चयन था लेकिन मुझे देख कर खुशी हुई कि उन्होंने खुद कैसे सवाल सेट किए और यह सुनिश्चित करने के लिए उन्होंने काफी मेहनत की कि वो सही थे और उन्होंने पॉइंट स्कोर किए।

अध्याय के अंत में हमने एक नॉकआउट प्रतियोगिता रखने का फैसला किया। टीम **A** टीम **B** के साथ खेला और उनके विजेता ने टीम **C** से खेला और इस तरह आगे भी खेल को बढ़ाया। मुझे लगा यह काफी कारगर रहा क्योंकि हम हर प्रयास पर रुके और हमने हर किसी के दिये गये उत्तरों का मूल्यांकन किया और देखा कि वे सही क्यों थे और गलत क्यों थे। इसके कारण काफी चर्चा हुई और मैं यह देखकर फिर एक बार हैरान थी कि हर छात्र ने अपने मन में ही तेज़ी से अंकगणित करने



के लिए खुद को कितनी चुनौती दी थी।

### अपने शिक्षण-अभ्यास के बारे में सोचना

अपनी कक्षा के साथ ऐसा कोई अभ्यास करने के बाद यह सोचें कि क्या ठीक रहा और कहाँ गड़बड़ी हुई। ऐसे प्रश्नों की ओर ध्यान दें जिनमें छात्र-छात्राओं की रुचि दिखाई दे और वे आगे बढ़ते हुए नज़र आएँ और वे जिनका स्पष्टीकरण करने की आवश्यकता हो। ऐसे चिंतन से वह 'स्क्रिप्ट' मिल जाती है, जिसकी मदद से आप छात्र-छात्राओं के मन में गणित के प्रति रुचि जगा सकते हैं और उसे मनोरंजक बना सकते हैं। अगर छात्र-छात्राओं को समझ नहीं आ रहा है और वे कुछ नहीं कर पा रहे हैं, तो इसका मतलब है कि उनकी इसमें सम्मिलित होने की रुचि नहीं है। जब भी आप गतिविधियाँ करें, इस विचार करनेवाले अभ्यास का उपयोग करें।

श्रीमती अपराजिता की तरह कुछ छोटी-छोटी चीजें नोट करें जिनसे काफी फर्क पड़ जाता है।



### ज़रा सोचिए

ऐसे चिंतन को गति देने वाले अच्छे प्रश्न निम्नलिखित हो सकते हैं:

- इस गतिविधि को लेकर आपके छात्र-छात्राओं की कैसी प्रतिक्रिया थी? छात्र-छात्राओं से कैसी प्रतिक्रियाएँ अनपेक्षित थीं और क्यों?
- क्या किसी भी समय आपको ऐसा लगा कि हस्तक्षेप करना चाहिए?
- किन बिंदुओं पर आपको लगा कि आपको और समझाना होगा?
- क्या आपने कार्य के दौरान किसी भी तरीके का संशोधन किया? अगर हाँ, तो इसके पीछे आपके क्या तर्क थे?

## 3 अनुमान लगाना और सामान्यीकरण

अनुमान लगाना (सिद्धांत) और बाद में तर्क देना कि वे सच हैं, कभी-कभी सच हैं या गलत हैं, सामान्यीकरण के विचारों को विकसित करने का हिस्सा है जिन पर बीजगणितीय सोच निर्भर करती है।

'योगात्मक तादात्म्य' अर्थात्, यह विचार कि शून्य जोड़ने या घटाने से मूल संख्या वही रहती है – अपेक्षाकृत आसानी से समझ लिया जाता है। हालाँकि बाद में बीजगणितीय समीकरण हल करने में बाद में उसके उपयोग के कारण इस तादात्म्य का अन्वेषण आवश्यक हो जाता है।

छात्र-छात्राओं के लिए ऐसी पहचानों की समझ को स्पष्ट रूप से कह पाना बेहद महत्वपूर्ण है और ऐसा छात्र-छात्राओं से अनुमान विकसित करने के लिए कहकर किया जा सकता है। जब किसी संख्या में शून्य जोड़ा जाता है या उसमें से घटाया जाता है तो क्या होता है इस बारे में कक्षा कथन या अनुमान विकसित कर सकती है।

छात्र अक्सर अपने विचारों को जाँचने के लिए कई अलग-अलग संख्याएँ आजमा कर देखते हैं। छात्र-छात्राओं को यह विचार करने के लिए प्रोत्साहित करना महत्वपूर्ण है कि उनके अनुमान (या सिद्धांत) सारी संख्याओं के लिए काम करते हैं या नहीं। इस तरह से आपके छात्र संख्या के गुणों के बारे में बीजगणितीय रूप से सामान्यीकृत करना आरंभ कर देंगे।

किसी कक्षा द्वारा विकसित किये गये नियम या अनुमान प्रदर्शित किये जा सकते हैं और/या जिस छात्र की अवधारणा थी उसके नाम से उस नियम का नाम रखा जा सकता है, उदाहरण के लिए 'प्रेम का नियम'।

यहाँ छात्र-छात्राओं द्वारा जोड़ने के बारे में विकसित किये गये कुछ अनुमानों के उदाहरण दिये गये हैं:

प्रेम का नियम: 'जब आप किसी संख्या में शून्य जोड़ते हैं तो इससे वह संख्या नहीं बदलती जिससे आपने आरंभ किया था' ( $a + 0 = a$ )।

अनीशा का नियम: 'जब आप किसी संख्या में से शून्य घटाते हैं तो इससे वह संख्या नहीं बदलती जिससे आपने आरंभ किया था' ( $a - 0 = a$ )।

ज्योत्सना का नियम: 'यदि आपने जिस संख्या से आरंभ किया था उसमें से वही संख्या निकाल लेते हैं तो उत्तर 0 आता है' ( $a - a = 0$ )।

विशाल का नियम: 'यदि संख्या-वाक्य के प्रत्येक ओर संख्याओं की आपस में अदलाबदली कर दी जाए तो इससे कोई फर्क नहीं पड़ता। यदि संख्याएँ समान हैं, तो संख्या-वाक्य तब भी संतुलित होगा।' ( $a + b = b + a$ )।

सिमी का नियम: 'जब आप दो संख्याएँ जोड़ते हैं, तो आप जोड़ी जानेवाली संख्याओं का क्रम बदल सकते हैं और आपको तब भी वही संख्या प्राप्त होगी' ( $a + b = b + a$ )।

## खोज करना और अनुमान लगाना

निम्नलिखित गतिविधि आपको दिखाती है कि कैसे आप अंकगणित-कथनों का खोज करके और वे सच हैं, कभी-कभी सच हैं या कभी सच नहीं हैं, इसके बारे में अनुमान लगाकर छात्र-छात्राओं को बीजगणितीय रूप से सोचना आरंभ करने में मदद कर सकते हैं। कई बार यह देख कर छात्र आश्चर्यचकित हो सकते हैं कि उन्हें 'यह सत्य नहीं है' कहने की अनुमति है। यह वाकई महत्वपूर्ण है कि उन्हें संख्याओं के साथ दिखनेवाली हर चीज़ को यँ ही स्वीकार नहीं कर लेना चाहिए बल्कि उन्हें यह सोचने के लिए तैयार रहना चाहिए 'क्या यह हमेशा सत्य है या मैं इसे असत्य ठहरा सकता/सकती हूँ?'

### गतिविधि 2: अनुमान

#### तैयारी

ब्लैकबोर्ड पर कई अंकगणितीय कथन लिखें। कुछ उदाहरण जिन्हें आप उपयोग कर सकते हैं:

- $(3 + 5) + 8 = 3 + (5 + 8)$
- $(3 + 5) \times 8 = 3 + (5 \times 8)$
- $(3 - 5) - 8 = 3 - (5 - 8)$
- $(3 \times 5) + 8 = 3 \times (5 + 8)$

नोट करें कि कुछ कथन सच होने चाहिए और कुछ सच नहीं होने चाहिए।

संसाधन 2 में कथनों के और उदाहरण हैं।

#### गतिविधि

अपने छात्र-छात्राओं से निम्न करने को कहें:

- प्रत्येक कथन की वैधता की जाँच करें।
- सारे सही कथनों के लिए, एक, दो या सारी तीन संख्याएँ बदल कर कई मिलते-जुलते कथन लिखें। क्या ये सभी सत्य हैं? यदि हाँ, तो क्या आपको लगता है कि ये कथन संख्याओं के सभी संभावित चयनों के लिए सत्य होंगे? अपने विचारों को अनुमान के रूप में लिख कर रखें।
- सारे गलत कथनों के लिए, एक, दो या सारी तीन संख्याएँ बदल कर कई मिलते-जुलते कथन लिखें। क्या इनमें से सभी गलत हैं या आप एक सही कथन ढूँढ सकते हैं? क्या आपको लगता है कि संख्याओं के सभी संभावित चुनावों के लिए ये कथन गलत होंगे? अपने विचारों को अनुमान के रूप में लिखकर रखें।

यह गतिविधि छात्र-छात्राओं को बातें करके सीखने के मूल्यवान अवसर प्रदान करती है। आप शायद गतिविधि के इस पहलू

के लिए अपनी योजना में मदद के लिए मुख्य संसाधन 'सीखने के लिए संवाद' को देखना चाहें।

## वीडियो: सीखने के लिए बातचीत



### केस स्टडी 2: श्रीमती नुपूर गतिविधि 2 के उपयोग के बारे में बताती हैं

मैंने छात्र-छात्राओं को पाँच के समूहों में बाँटा और फिर मैंने ब्लैकबोर्ड पर लिखे कथनों की वैधता पर चर्चा के लिए उन्हें दस मिनट दिए।

समूहों के बीच बहुत चर्चा हुई। इससे मुझे बहुत ही खुशी हुई क्योंकि जब मैंने उनकी बातों को सुना तो वे सब सोच रहे थे कि कथन सत्य क्यों थे या क्या वे उन संख्याओं को सोच सकते थे जो उन्हें असत्य बना सके या इसका विपरीत सही हो।

ऐसे कुछ छात्र थे जो अपने समूह में सोच में कोई योगदान नहीं दे रहे थे, इसलिए मैंने समूह से यह सुनिश्चित करने को कहा कि वे उन्हें भी चर्चा में शामिल करें। उनमें से एक ने स्कूल में कुछ समय खो दिया था और उसे फिर से समूह का हिस्सा बन पाने में मदद की ज़रूरत थी। उसका अंकगणित खास तौर पर अच्छा था, इसलिए उन्होंने जल्द ही उसके योगदान की सराहना की। मैंने कक्षा से कहा कि हर किसी को उसके हिस्से का सोचना ज़रूरी था और विचार साझा करना हर किसी के लिए मददगार होगा। मैंने यह भी कहा कि मैं उस छात्र को चुनूँगी जो प्रस्तुति देगा। इसलिए जो भी कहा गया है उस पर हर किसी को रिपोर्ट करना आवश्यक था तो फिर वे सभी अभ्यास में लग गए।

मैंने अलग-अलग छात्र-छात्राओं से उनके अपने समूह की चर्चाओं से उत्तर देने को कहा और यह बताने को कहा कि उन्हें क्या लगता था कि कथन हमेशा सत्य, कभी-कभी सत्य था या कभी सत्य नहीं था। मैंने उनसे पूछा कि उन्होंने कौन सी संख्याएँ आजमाई थीं और उनसे यह बताने की कोशिश करने के लिए भी कहा कि उन्होंने वह विशेष मान क्यों चुने थे। फिर मैंने अन्य समूहों को भी उनके द्वारा चुनी गई संख्याओं का योगदान करने के लिए कहा, तो इस तरह हमारे पास उदाहरणों की एक खासी तादाद एकत्रित हो गई।

इसमें काफी समय लग गया, खासकर एक गलत कथन के साथ क्योंकि कई समूहों को यकीन था कि वे उसे सत्य बनाने का कोई तरीका ढूँढ सकते थे। इसका अर्थ था हम उन सारे कथनों को नहीं देख पाए जो मैंने तैयार किए थे और इसलिए मैंने उन्हें अपने खुद के अनुमान लिख कर बाकी को गृहकार्य के रूप में पूरा करने के लिए कहा।

उन्हें जो मिला था उस पर हमने अगले दिन चर्चा की और उसमें अधिकांश ने भारी योगदान दिया। मैंने देखा कि कक्षा में पीछे बैठे कुछ छात्र बहुत शांत थे। जब मैं उनसे बात करने गई, तो उनमें से कुछ ने कहा वे नहीं समझे थे कि क्या करना था, तो मैंने उनसे पूछा कि दूसरों के द्वारा बनाये गये अनुमान सही या गलत क्यों थे।



## ज़रा सोचिए

- कक्षा में पीछे बैठे शांत छात्र-छात्राओं से श्रीमती नुपूर ने जिस तरह बात की उसके बारे में आपका क्या सोचना है? उन्हें क्या करना है यह उनके न समझने के क्या संभावित कारण हो सकते हैं?
- अब इस बारे में सोचें कि आपके छात्र-छात्राओं ने गतिविधि पर कैसी प्रतिक्रिया दी और निम्नलिखित प्रश्नों पर विचार करें:
- छात्र-छात्राओं से कैसी प्रतिक्रियाएँ अनपेक्षित थीं और क्यों?
- अपने छात्र-छात्राओं की समझ का पता लगाने के लिए आपने क्या सवाल किए?
- क्या आपने कार्य के दौरान किसी भी तरीके का संशोधन किया? अगर हाँ, तो इसके पीछे आपके क्या तर्क थे?

## 4 अधिक औपचारिक सामान्यीकरणों पर जाना

कथनों के बारे में अनुमान लगाने से चिह्नों का उपयोग करके सामान्यीकरण पर जाना एक बहुत बड़ी छलांग हो सकती है, लेकिन यदि आपके छात्र गतिविधि 1 और 2 में दिये गये खेलों पर काम करते आ रहे हैं, तो उन्होंने शायद पहले ही प्रतीकों का उपयोग आरंभ कर दिया होगा।

उदाहरण के लिए, उन्होंने कुछ इस तरह की बातें कही होंगी 'यदि आप किसी संख्या से 2 लेते हैं और उसमें पाँच जोड़ देते हैं, तो उत्तर हमेशा तीन अधिक ही होगा'। इस सन्दर्भ में किसी संख्या को दिखाने के सुविधाजनक तरीके के रूप में  $x$  या  $n$  का उपयोग पूरी तरह से स्वाभाविक प्रतीत हो सकता है।

अगली गतिविधि अधिक औपचारिक सामान्यीकरणों को प्रोत्साहित करने लगती है।

### गतिविधि 3: सामान्यीकरण

#### तैयारी

दो प्रकार के फ्लैश कार्ड बनाएँ:

- **S-कार्ड:** इनके विशिष्ट अंकगणितीय कथन होते हैं जो सत्य हो सकते हैं या नहीं भी हो सकते।
- **G-कार्ड:** इनके सामान्यीकृत कथन (अनुमान) होते हैं जो **S-कार्ड** के कथनों के संगत होते हैं।

संसाधन 3 में **S-कार्ड** और **G-कार्ड** के उदाहरण दिये गये हैं। आप इन्हें अपनी कक्षा के स्तर के अनुसार बदल सकते हैं।

कक्षा को समूहों में बाँटें। इस गतिविधि के लिए छह से दस लोगों के समूह अच्छे रहते हैं। सारे **S-कार्ड** और सारे **G-कार्ड** अलग अलग फेंट दें। अपनी कक्षा को समूहों में व्यवस्थित करने के बारे में सोचते समय आप शायद प्रमुख संसाधन 'समूहकार्य का उपयोग' पर नज़र डालना चाहें। हर समूह को दो बराबर-बराबर भागों में विभाजित करें। पहले आधे भाग को **S-कार्ड** और दूसरे आधे भाग को **G-कार्ड** वितरित करें।

#### गतिविधि

##### भाग 1

अपने छात्र-छात्राओं को **S-कार्ड** और **G-कार्ड** की जोड़ियाँ बनाने के लिए कहें और फिर देखें कि किया गया अनुमान हमेशा सत्य है, कभी-कभी सत्य है या असत्य है। एक दूसरा उपाय है छात्र-छात्राओं को पाँच या छह के समूहों में कार्य करने के लिए कहना और उन्हें छह **S-कार्ड** और **G-कार्ड** सौंप देना। यदि उनके पास एक विशिष्टीकृत (**S**) कार्ड है तो उन्हें उस कार्ड को सामान्यीकृत (**G-कार्ड** बनाना) करना पड़ेगा। यदि उनके पास **G-कार्ड** है तो उन्हें उसके लिए एक **S-कार्ड**

बनाना पड़ेगा और फिर चर्चा करनी होगी कि वह हमेशा सत्य है, कभी-कभी सत्य है या कभी भी सत्य नहीं है।

संसाधन 4 प्रत्येक प्रकार के कार्ड की सामग्री के लिए कुछ उदाहरण प्रस्तुत करता है।

## भाग 2

छात्र-छात्राओं से उनके अपने S-कार्ड और G-कार्ड बनाने के लिए कहें।



### वीडियो: समूह-कार्य का उपयोग करना

#### केस स्टडी 3: श्रीमती नसीमा गतिविधि 3 के उपयोग का अनुभव बताती हैं

मैंने [संसाधन 3 में] दिये सुझावों का उपयोग करके S-कार्ड और G-कार्ड बनाए। मुझे यह गतिविधि अच्छी लगी क्योंकि मैंने सोचा इससे छात्र-छात्राओं को प्रोत्साहन मिलेगा कि वे अभिव्यक्ति की तुलना करें और फिर देखें कि कैसे प्रत्येक अभिव्यक्ति को गणितीय भाषा में संदर्भित किया जा सकता है।

मैंने इस तरह समूह बनाए कि हर समूह में एक छात्र था जिसे बीजगणित की अच्छी समझ थी। फिर मैंने उनसे यह सुनिश्चित करने के लिए कहा कि समूह के सारे छात्र इस चर्चा में भाग ले रहे हैं कि उनके अनुमानित सामान्यीकरण पूरी तरह असत्य थे, कभी-कभी सत्य थे (यदि ऐसा है तो कब) या हमेशा सत्य थे। समूहों को यह चेतावनी भी दी गई थी कि उनके समूह का वर्णन किसी छात्र द्वारा ही किया जाएगा, इसलिए उन सभी की एक आम सहमति होना आवश्यक है।

यह काफी अच्छा रहा। समूहों में चल रही जो चर्चा मेरे कानों पर पड़ी वह कक्षा के लिए असाधारण थी क्योंकि उनमें से हर एक ने विशिष्ट को सामान्यता के साथ मिलाने की और यह पता करने की कोशिश की कि वह हमेशा सत्य था या नहीं। मैंने हर समूह को कार्ड की एक जोड़ी प्रस्तुत करने और उन्होंने जो तय किया उसका तर्क देने को कहा। इसमें कुछ समय लगा लेकिन सिर्फ इसलिए क्योंकि वे एक-दूसरे के साथ बहुत अधिक चर्चा कर रहे थे! हमें गतिविधि के दूसरे भाग को अगले दिन के लिए छोड़ना पड़ा।

उनके खुद के S-कार्ड और G-कार्ड बनाना भी एक अच्छा अभ्यास था, क्योंकि मैंने उन्हें यह व्यक्तिगत रूप से करने के लिए कहा और फिर उनमें से प्रत्येक ने बताया कि उसने समूहों में क्या बनाया था। इस प्रकार उन्हें इस बारे में अपनी कक्षा के सहपाठियों से बहुत सी जानकारी मिली कि वे उनके कथनों के बारे में सही थे या उनके बीच कोई गलतफहमी थी।



### ज़रा सोचिए

- अपने छात्र-छात्राओं की समझ का पता लगाने के लिए आपने क्या सवाल किए?
- क्या किसी भी समय आपको ऐसा लगा कि हस्तक्षेप करना चाहिए?
- किन बिंदुओं पर आपको लगा कि आपको और समझाना होगा?
- आपने अपने छात्र-छात्राओं को टीमों में कैसे विभाजित किया?
- क्या आप इन टीमों का पुनः उपयोग करेंगे?
- इस गतिविधि के लिए आप अपने छात्र-छात्राओं की समझ का आकलन कर सके?
- क्या ऐसे छात्र हैं जिन्हें अधिक सहायता की आवश्यकता है?

## 5 सारांश

इस इकाई ने बीजगणितीय सोच पर और आपके छात्र-छात्राओं को बीजगणितीय सोच और अंकगणित के बीच समानताओं और असमानताओं पर विचार करने में मदद करने पर ध्यान केंद्रित किया है।

इस इकाई का अध्ययन करने में आपने बराबर के चिह्न को 'और उत्तर है' की बजाय 'के समान है' के अर्थ में समझने के महत्व को पहचान लिया होगा। आपने यह भी सोचा होगा कि अपने छात्र-छात्राओं को उनकी तर्कशक्ति विकसित करने में कैसे सक्षम करें कि कथन सत्य हैं या असत्य हैं और वे सत्य हैं तो क्या वे सभी संख्याओं के लिए सत्य हैं?

आपने सोचा कि छात्र-छात्राओं को यह समझने में कैसे मदद करें कि वे गणितज्ञों के रूप में कार्य कर सकते हैं और कथन कारगर हैं या नहीं इसके कारणों का अन्वेषण और निर्माण कर सकते हैं। उन्हें ही यह फैसला करना पड़ेगा कि कोई चीज़ सत्य है या असत्य। इस प्रकार आपके छात्र-छात्राओं में चिह्न या सामान्धीकरण का उपयोग करते समय दुविधा में या भौंचक्का होने की बजाय बीजगणितीय सोच का उपयोग करके गणितज्ञों के रूप में आत्मविश्वास बढ़ेगा।

आप यह भी देखेंगे कि अपने छात्र-छात्राओं की शिक्षा की सहायता में बेहतर होने के लिए अपने शिक्षण पर विचार करना कितना महत्वपूर्ण है।



### ज़रा सोचिए

- उन तीन तकनीकों या रणनीतियों की पहचान करें, जिन्हें आपने इस इकाई में सीखा है और जिनका उपयोग आप कक्षा में करेंगे, साथ ही कोई दो ऐसे विचार बताएँ जिनके बारे में आप आगे जानना चाहते हैं।

## संसाधन

### संसाधन 1: एनसीएफ/एनसीएफटीई: शिक्षण आवश्यकताएँ

यह इकाई एनसीएफ (2005) और एनसीएफटीई (2009) की निम्नलिखित शिक्षण आवश्यकताओं के साथ संबंध स्थापित करती है तथा उन आवश्यकताओं को पूरा करने में आपकी मदद करेगी:

- छात्र-छात्राओं को उनके सीखने में सक्रिय प्रतिभागी के रूप में देखें न कि सिर्फ ज्ञान प्राप्त करनेवाले के रूप में; ज्ञान-निर्माण के लिए उनकी क्षमताओं को कैसे प्रोत्साहित करें; रटने वाली पद्धतियों से शिक्षण को दूर कैसे ले जाएँ।
- छात्र-छात्राओं को गणित को किसी ऐसी चीज़ के रूप में लेने दें जिसके बारे में वे बातें करें, जिसके द्वारा संवाद करें, जिसकी आपस में चर्चा करें, जिस पर साथ मिलकर कार्य करें।
- चलिए छात्र-छात्राओं को गणित का महत्व समझने दें और सूत्रों तथा यांत्रिक प्रक्रियाओं से आगे बढ़कर गणित को जानने का प्रयास करने दें।

### संसाधन 2: गतिविधि 2 में उपयोग के लिए कथनों के उदाहरण

ब्लैकबोर्ड पर इसके समान कई अंकगणितीय कथन लिखें।

ध्यान दें कि आपके द्वारा उपयोग किये गये कुछ कथन सत्य और कुछ गलत होने चाहिए।

$$(3 + 5) + 8 = 3 + (5 + 8)$$

$$(3 + 5) \times 8 = 3 + (5 \times 8)$$

$$(3 - 5) - 8 = 3 - (5 - 8)$$

$$(3 \times 5) + 8 = 3 \times (5 + 8)$$

$$3 - (5 + 8) = (3 - 5) + 8$$

$$(8 - 5) \times 3 = (3 - 5) \times 8$$

$$(8 + 5) \times 3 = 8 \times 3 + 8 \times 5$$

$$3 \times 5 + 3 \times 8 = (3 + 5) \times 8$$

$$3 \times 5 - 8 = 8 - 3 \times 5$$

$$3 \times (5 - 8) = 3 \times 5 - 3 \times 8$$

$$(5 - 3) \times 8 = 8 \times (3 - 5)$$

$$3 \times (8 - 5) = 3 \times 8 - 3 \times 5$$

संसाधन 3: S-कार्ड और G-कार्ड के उदाहरण

तालिका R3.1 S-कार्ड और G-कार्ड के उदाहरण।

S-कार्ड (विशिष्टीकरण)	G-कार्ड (सामान्यीकरण)	सामान्यीकरण हमेशा सत्य (A), कभी-कभी सत्य (S) या असत्य (F) होता है।
$(3 \times 2) \times 4 = 3 \times (2 \times 4)$	चाहे जिन दो संख्याओं का पहले गुणा किया जाए तीन संख्याओं का गुणनफल हमेशा समान रहता है।	A
$12 \div 3 = (12 \div 4) + 1$	$ab/b = ab/a + (a - b)$	A
$12 + 20 = 4 \times 8$	$ab + bc = b(a + c)$	A
$2 \times 4 + 3 \times 4 = 4 \times 5$	$a(a + 2) + (a + 1)(a + 2) = (a + 2)(a + 3)$	S
$2 \times 1^2 = (2 \times 1)^2$	किसी वर्ग संख्या का दो गुना उस संख्या के वर्ग के दो गुने के बराबर होता है।	S
$4 + 16 - 8 = 8 + 8 - 4$	$4 + 4(a - 2) = 2a + 2(a - 2)$	S
$4 + 4 \times 1 = 6 + 1 + 1$	$4 + 4(a - 2) = 3(a - 1) + (a - 2) + 1$	A
$3 + 2 + 1 = 3 \times 2 \times 1$	तीन लगातार संख्याओं का योग उन संख्याओं के गुणनफल के बराबर होता है।	S

$4 + (6 \div 2) = 4 + 3$	$a + bc/c = a + b$	A
$461 + 200 = 200 + 461$	यदि आप दो संख्याओं को साथ जोड़ते हैं तो आप क्रम बदल सकते हैं और आपको फिर भी वही उत्तर मिलेगा।	A
$7 \times 4 = 9 \times 7 - 5 \times 7$	$c(a - b) = ac - bc$	A

संसाधन 4: **S**-कार्ड और **G**-कार्ड का उपयोग

तालिका R4.1 S-कार्ड और G-कार्ड का उपयोग

S-कार्ड (विशिष्टिकरण)	G-कार्ड (सामान्यीकरण)	सामान्यीकरण हमेशा सत्य (A), कभी-कभी सत्य (S) या असत्य (F) होता है
$(3 \times 2) - 1 = (3 + 2)$	दो संख्याओं के गुणनफल का पूर्ववर्ती उन दो संख्याओं के योग के बराबर होता है।	
$(3 \times 2) \times 4 = 3 \times (2 \times 4)$	यदि किन्हीं दो संख्याओं के गुणनफल को तीसरी संख्या से गुणा किया जाए, तो तीन संख्याओं का गुणनफल समान रहता है।	
$12 \div 3 = (12 \div 4) + 1$	$ab/b = ab/a + (a - b)$	

### अतिरिक्त संसाधन

- A newly developed maths portal by the Karnataka government: <http://karnatakaeducation.org.in/KOER/en/index.php/Portal:Mathematics>
- National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics: <https://www.ncetm.org.uk/>
- National STEM Centre: <http://www.nationalstemcentre.org.uk/>
- National Numeracy: <http://www.nationalnumeracy.org.uk/home/index.html>
- BBC Bitesize: <http://www.bbc.co.uk/bitesize/>
- Khan Academy's math section: <https://www.khanacademy.org/math>
- NRICH: <http://nrich.maths.org/frontpage>
- Art of Problem Solving's resources page: <http://www.artofproblemsolving.com/Resources/index.php>
- Teachnology: <http://www.teach-nology.com/worksheets/math/>
- Math Playground's logic games: <http://www.mathplayground.com/logicgames.html>
- Maths is Fun: <http://www.mathsisfun.com/>
- Coolmath4kids.com: <http://www.coolmath4kids.com/>
- National Council of Educational Research and Training's textbooks for teaching mathematics and for teacher training of mathematics: <http://www.ncert.nic.in/ncerts/textbook/textbook.htm>



- AMT-01 *Aspects of Teaching Primary School Mathematics*, Block 1 ('Aspects of Teaching Mathematics'), Block 2 ('Numbers (I)'), Block 3 ('Numbers (II)'): <http://www.ignou4ublog.com/2013/06/ignou-amt-01-study-materialbooks.html>
- LMT-01 *Learning Mathematics*, Block 1 ('Approaches to Learning') Block 2 ('Encouraging Learning in the Classroom'), Block 4 ('On Spatial Learning'), Block 6 ('Thinking Mathematically'): <http://www.ignou4ublog.com/2013/06/ignou-lmt-01-study-materialbooks.html>
- *Manual of Mathematics Teaching Aids for Primary Schools*, published by NCERT: <http://www.arvindguptatoys.com/arvindgupta/pks-primarymanual.pdf>
- *Learning Curve* and *At Right Angles*, periodicals about mathematics and its teaching: [http://azimpremijfoundation.org/Foundation\\_Publications](http://azimpremijfoundation.org/Foundation_Publications)
- Textbooks developed by the Eklavya Foundation with activity-based teaching mathematics at the primary level: [http://www.eklavya.in/pdfs/Catalouge/Eklavya\\_Catalogue\\_2012.pdf](http://www.eklavya.in/pdfs/Catalouge/Eklavya_Catalogue_2012.pdf)
- Central Board of Secondary Education's books and support material (also including *List of Hands-on Activities in Mathematics for Classes III to VIII*) – select 'CBSE publications', then 'Books and support material': <http://cbse.nic.in/welcome.htm>

#### संदर्भ/संदर्भग्रंथ सूची

Mason, J., Burton, L. and Stacey, K. (2010) *Thinking Mathematically*, 2nd edn. Harlow: Pearson Education.

National Council for Teacher Education (2009) *National Curriculum Framework for Teacher Education* (online). New Delhi: NCTE. Available from: [http://www.ncte-india.org/publicnotice/NCFTE\\_2010.pdf](http://www.ncte-india.org/publicnotice/NCFTE_2010.pdf) (accessed 6 March 2014).

National Council of Educational Research and Training (2005) *National Curriculum Framework (NCF)*. New Delhi: NCERT.

Watson, A., Jones, K. and Pratt, D. (2013) *Key Ideas in Teaching Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Zack, V. and Graves, B. (2001) 'Making mathematical meaning through dialogue: "Once you think of it, the Z minus three seems pretty weird"', *Educational Studies in Mathematics*, vol. 46, pp. 229–71.

#### अभिस्वीकृतियाँ

यह सामग्री क्रिएटिव कॉमन्स एट्रिब्यूशन-शेयरएलाइक लाइसेंस (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>) के अंतर्गत उपलब्ध कराई गई है, जब तक कि अन्यथा निर्धारित न किया गया हो। यह लाइसेंस TESS-India, OU और UKAID लोगो के उपयोग को वर्जित करता है, जिनका उपयोग केवल TESS-India परियोजना के भीतर अपरिवर्तित रूप से किया जा सकता है।

कॉपीराइट के स्वामियों से संपर्क करने का हर प्रयास किया गया है। यदि किसी को अनजाने में अनदेखा कर दिया गया है, तो पहला अवसर मिलते ही प्रकाशकों को आवश्यक व्यवस्थाएं करने में हर्ष होगा।

वीडियो (वीडियो स्टिल्स सहित): भारत भर के उन शिक्षक प्रशिक्षकों, प्रधानाध्यापकों, शिक्षकों और छात्र-छात्राओं के प्रति आभार प्रकट किया जाता है जिन्होंने उत्पादनों में दि ओपन यूनिवर्सिटी के साथ काम किया है।