माध्यमिक गणित

कल्पना करना, तुलना करना और विषमता का पता लगाना: संख्या प्रणालियां

भारत में विद्यालय आधारित समर्थन के माध्यम से शिक्षक शिक्षा

www.TESS-India.edu.in

http://creativecommons.org/licenses/

संदेश

शिक्षकों को बाल केंन्द्रित कक्षा अभ्यास की ओर उन्मुख करने तथा शिक्षक प्रशिक्षण की गुणवत्ता को बेहतर बनाने के उद्देश्यों को सम्मुख रखते हुए TESS-India राष्ट्रीय स्तर पर कार्यरत है। इस दिशा में TESS-India द्वारा मुक्त शैक्षिक संसाधन (Open Educational Resources) का विकास किया गया है । ये संसाधन शिक्षकों तथा शिक्षक–प्रशिक्षकों के वृत्ति विकास (Professional development) में लाभकारी एवं उपयोगी सिद्ध होंगे। राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद, बिहार के नेतृत्व में इन संसाधनों का स्थानीयकृत किया गया है, जिसके अन्तर्गत इनके उद्देश्य के मूल को बरकरार रखते हुए इनमें स्थानीय, भाषा, बोली, प्रथाओं, संस्कृतियों तथा नियमों को सम्मिलित किया गया है। इनका उपयोग शिक्षण कार्य में सहजता एवं सुगमता पूर्वक किया जा सकता है ।

राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद, बिहार के मार्गदर्शन में TESS-India द्वारा स्थानीय भाषा में तैयार मुक्त शैक्षिक संसाधन (Open Educational Resources) नेट पर आप सभी के लिए सुलभ उपलब्ध है ।

शुभकामनाओं सहित ।

(डॉ0 मुरली मनोहर सिंह)
निदेशक
एस0सी0ई0आर0टी0, बिहार

समीक्षा एवं दिशाबोध
डॉ. मुरली मनोहर सिंह, निदेशक राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार
डॉ. सैयद अब्दुल मोईन, विभागाध्यक्ष, अध्यापक शिक्षा विभाग, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार
डॉ. क़ासिम खुर्शीद, विभागाध्यक्ष, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्
डॉ. इम्तियाज़ आलम, विभागाध्यक्ष, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार
डॉ. स्नेहाशीष दास राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार
डॉ. अर्चना, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार
डॉ. रीता राय, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार
श्री तेज नारायण प्रसाद, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार

स्थानीयकरण
भाषा और शिक्षा
डॉ. ज्ञानदेव मणि त्रिपाठी, प्राचार्य, मैत्रेय कॉलेज ऑफ एडुकेशन एण्ड मैनेजमेंट, हाजीपुर, वैशाली
श्री सुमन सिंह, प्रखंड साधनसेवी, भगवानपुर हाट, सिवान
श्री कात्यायान कुमार त्रिपाठी, प्राथमिक विद्यालय चैलीटाल, पटना
श्री कृत प्रसाद, प्रखंड साधनसेवी, हिलसा, नालंदा
प्राथमिक अंग्रेज़ी
श्री अरशद रज़ा, सहायक शिक्षक, प्राथमिक विद्यालय, पचासा रहुई, नालंदा
श्री संतोष सुमन, सहायक शिक्षक, बालिका उच्च विद्यालय, महुआबाग
श्री शशि भूषण पाण्डेय, सहायक शिक्षक, उत्क्रमित मध्य विद्यालय, मुकुन्दपुर, नालंदा
श्रीमती रचना त्रिवेदी, शिक्षिका, नोट्रेडेम अकादमी, पटना
माध्यमिक अंग्रेज़ी
श्री मणिशंकर, प्रधानाध्यापक, तारामणी भगवानसाव उच्च माध्यमिक विद्यालय, कोइलवर, भोजपुर
डॉ. ब्रजेश कुमार, शिक्षक, पी. एन. एंग्लो संस्कृत माध्यमिक विद्यालय, नया टोला, पटना
प्राथमिक गणित
श्री कृष्ण कान्त ठाकुर
श्री दिलीप कुमार, संकुल संसाधन केन्द्र समन्वयक, बुलनी हैदरपुर, नालंदा
श्री गोविन्द प्रसाद, प्रखंड साधनसेवी, चनपटिया, पश्चिमी चम्पारण
माध्यमिक गणित
डॉ. राकेश कुमार, भागलपुर डायट
श्री रिज़वान रिज़वी, उत्क्रमित मध्य विद्यालय, सिलौटा चाँद, कैमूर
श्री इन्द्रभूषण कुमार, शिक्षक, सहयोगी माध्यमिक विद्यालय, हाजीपुर, वैशाली
प्राथमिक विज्ञान
श्री मनोज त्रिपाठी, प्रखंड साधनसेवी, बरहारा, भोजपुर
श्री शशिकान्त शर्मा, प्रखंड साधनसेवी, आरा, भोजपुर
श्री रणबीर सिंह, संकुल संसाधन केन्द्र समन्वयक, आदर्श आवासीय मध्य विद्यालय शिक्षक संघ, सहरसा
माध्यमिक विज्ञान
श्री जी.वी.एस.आर प्रसाद
श्री मुकुल कुमार, शिक्षक, सहायक शिक्षक, गोरखनाथ सूर्यदेव माध्यमिक विद्यालय, राजापाकर वैशाली

TESS-India (Teacher Education Through School Based Support) का लक्ष्य है भारत में मुक्त शैक्षिक संसाधनों के द्वारा प्राथमिक और माध्यमिक स्तरों पर शिक्षकों के कक्षा अभ्यासों को बेहतर करना। ये संसाधन शिक्षकों के छात्र–छात्रा–केन्द्रित, भागीदारी दृष्टिकोण को विकसित करने में सहायता करेंगे ।

TESS-India के मुक्त शैक्षिक संसाधन (Open Education Resources – OERs) *शिक्षकों को स्कूल की पाठ्यपुस्तक के लिए सहायक पुस्तिका प्रदान करते हैं।* ये संसाधन शिक्षकों के लिए गतिविधियाँ प्रदान करते हैं जो वे कक्षा में अपने छात्र–छात्राओं के साथ कर सकते हैं। साथ ही इनमें केस स्टडी भी हैं जो ये दर्शाते हैं कि किस प्रकार दूसरे शिक्षकों ने उस विषय को सिखाया है। संबंधित संसाधन शिक्षकों को पाठ योजना बनाने में और विषय पर ज्ञान वर्धन करने में उनकी सहायता करते हैं।

TESS-India के मुक्त शैक्षिक संसाधन भारतीय पाठ्यक्रम और संदर्भों के अनुकूल हैं। ये *भारतीय तथा अतंर्राष्ट्रीय लेखकों के सहयोग से तैयार* किये गये हैं *और ये ऑनलाइन तथा प्रिंट उपयोग के लिए उपलब्ध है (http://www.tess-india.edu.in)* / मुक्त शैक्षिक संसाधन अनेकों संस्करणों में उपलब्ध हैं जो प्रत्येक राज्य के लिए उपयुक्त है जहाँ TESS India कार्यरत है। उपयोगकर्ता इन संसाधनों को अनुकूल और स्थानीयकृत करने के लिए स्वतंत्र हैं ताकि ये स्थानीय आवश्यकताओं और संदर्भों को पूरा कर सकें।

TESS-India मुक्त विश्वविद्यालय, ब्रिटेन के नेतृत्व में तथा ब्रिटेन की सरकार द्वारा वित्त-पोषित है।

वीडियो संसाधन

इस इकाई की कुछ गतिविधियों के साथ निम्न प्रतीक का उपयोग किया गया है: *. इससे संकेत मिलता है कि निर्दिष्ट अध्यापन संबंधी थीम के लिए TESS-India वीडियो संसाधनों को देखना आपके लिए उपयोगी होगा।*

TESS-India वीडियो संसाधन भारत में अनेक प्रकार की कक्षाओं के संदर्भ में मुख्य अध्यापन तकनीकों का वर्णन करते हैं। हमें आशा है कि वे आपको इसी प्रकार के अभ्यासों के साथ प्रयोग करने के लिए प्रेरित करेंगे। उनका उद्देश्य पाठ (टेक्स्ट) पर आधारित इकाइयों के माध्यम से काम करने के आपके अनुभव का पूरक होना और उसे बढ़ाना है।

TESS-India वीडियो संसाधनों को ऑनलाइन देखा या TESS-India की वेबसाइट, http://www.tess-india.edu.in/ से डाउनलोड किया जा सकता है। वैकल्पिक रूप से, आप ये वीडियो सीडी या मेमोरी कार्ड के माध्यम से भी देख सकते हैं।

संस्करण 2.0 *SM03v1*
Bihar

तृतीय पक्षों की सामग्रियों और अन्यथा कथित को छोड़कर, यह सामग्री क्रिएटिव कॉमन्स एट्रिब्यूशन–शेयरएलाइक लाइसेंस के अंतर्गत उपलब्ध कराई गई है: *http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/*

TESS-India is led by The Open University UK and funded by UK aid from the UK government

यह इकाई किस बारे में है

गणित में कई संख्या प्रणालियाँ होती हैं: प्राकृतिक संख्याएँ, पूर्ण संख्याएँ, पूर्णांक, परिमेय संख्याएँ, अपरिमेय संख्याएँ और वास्तविक संख्याएँ। छात्र–छात्रा अक्सर सोचते हैं कि इन संख्या प्रणालियों के बीच का अंतर कुछ हद तक अस्पष्ट और मामूली है। इस इकाई में इन संख्या प्रणालियों के बीच समानता और असमानता का पता लगाया जाएगा, और यह पता लगाया जाएगा कि इनके बीच विभिन्न गणितीय संक्रियाएँ जैसे जोड़, गुणा, घातांक, कैसे काम करते हैं।

द नेशनल करिक्युलम फ्रेमवर्क फॉर टीचर एजुकेशन (NCFTE, 2009) में गणित के पाठों को रोचक, बाल केंद्रित और छात्र–छात्रा सहभागी होना और छात्र–छात्राओं में गणित की समझ बढ़ाने वाला होना आवश्यक बनाया गया है। ऐसा करना आसान नहीं है। इस इकाई का लक्ष्य समानता और असमानता का काम करके और कल्पनाशीलता का उपयोग करके इसे प्राप्त करने में शिक्षकों की मदद करना है। इकाई में इनमें से हर तरीके का वर्णन किया जाएगा और उदाहरण दिए जाएँगे कि कक्षा में इन्हें कैसे लागू किया जा सकता है। इस इकाई में यह भी चर्चा की जाएगी कि किसी पाठ्यपुस्तक का उपयोग करके मौजूदा कक्षा व्यवहारों में कैसे छोटे–छोटे बदलाव किए जा सकते हैं।

आप इस इकाई में सीख सकते हैं

- कुछ विचार कि संख्याओं और संख्याओं के कार्यों की कल्पना और विश्लेषण कैसे करें और उनकी सीमाओं को कैसे पहचानें।
- समानता और असमानता की गतिविधियों की संरचना और प्रभावों को पुनः व्यवस्थित करना और गणित का बोध करने में कल्पना आपके छात्र–छात्राओं की कैसे मदद कर सकती है।

इस इकाई का संबंध संसाधन 1 में दर्शाई गई राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा (NCF, 2005) और NCFTE (2009) सीखने–सिखाने की प्रक्रिया की आवश्यकताओं से है।

1 समानता और असमानता पता लगाने की गतिविधियाँ

समानता और असमानता लोगों को गणितीय गुणधर्मों और इसके अनुप्रयोगों से सजग रखने के लिए अच्छी गतिविधियाँ हैं। समानता और असमानता का कार्य को गणितीय उद्देश्य के बारे में सोचने और इस बात पर ध्यान देना कि क्या समान है और क्या असमान है, बाध्य करता है। ऐसा करते समय, छात्र–छात्रा वे संबंध बनाते हैं, जिनपर वे आमतौर पर ध्यान नहीं देते। उन्हें गणितीय चिंतन प्रक्रिया की ओर प्रेरित किया जाता है, जैसे सामान्यीकरण, यह अनुमान कि क्या समान रहता है और क्या बदल सकता है, और इन कल्पनाओं का सत्यापन। संबंध मालूम करने, संरचनाएँ देखने, चीजों का कारण पता करने और कथनों की सत्यता या असत्यता पर तर्क–वितर्क करने के लिए को सारग्रहण का उपयोग करने देने की राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की आवश्यकता का यह एक उदाहरण है।

समानता और असमानता की गतिविधियाँ, जैसा गतिविधि 1 में दिया गया है, छात्र–छात्राओं की इस बात में मदद कर सकती हैं:

- उनकी शिक्षा समेकित करें
- उन्हें विभिन्न संख्या प्रणालियों के विभिन्न उद्देश्य याद दिलाएँ
- प्रणालियों की सूक्ष्म समानताएँ और असमानताओं की जानकारी प्राप्त करें।

गतिविधि 1 में आपके छात्र–छात्राओं के लिए इस बारे में सोचना आवश्यक है कि कौन से कथन हमेशा सत्य, कभी–कभी सत्य होते हैं या कभी सत्य नहीं होते। उद्देश्य संख्या प्रणालियों के बीच असमानताओं की जानकारी प्राप्त करना और उनके कारणों के लिए गणितीय तर्क विकसित करना है। ऐसा करके वे गणितीय भाषा के उनके उपयोग के बारे में अधिक परिशुद्ध बन सकते हैं और अधिक सूक्ष्म समानताओं और असमानताओं पर ध्यान दे सकते हैं। परवर्ती प्रश्नों में, किसी संख्या रेखा को देखकर कल्पना की ओर पहला कदम बढ़ाया गया है।

इस इकाई में अपने छात्र–छात्राओं के साथ गतिविधियों के उपयोग का प्रयास करने के पहले अच्छा होगा कि आप सभी गतिविधियों को पूरी तरह (या आंशिक रूप से) स्वयं करके देखें। यह और भी बेहतर होगा यदि आप इसका प्रयास अपने किसी सहयोगी के साथ करें, क्योंकि जब आप अनुभव पर विचार करेंगे तो आपको मदद मिलेगी। गतिविधियों को स्वयं करके देखने से आपको शिक्षार्थी के अनुभवों के भीतर झांकने का मौका मिलेगा, जो अप्रत्यक्ष रूप से आपकेसीखने–सिखाने की प्रक्रिया और एक शिक्षक/शिक्षिका के रूप में आपके अनुभवों को प्रभावित करेगा। जब आप तैयार हों, तो अपने छात्र–छात्राओं के साथ गतिविधियों का उपयोग करें। पाठ के बाद, सोचें कि गतिविधि किस तरह हुई और उससे क्या सीख मिली। इससे आपको अधिकछात्र–छात्राओं को केंद्र में रखने वाला शैक्षिक वातावरण बनाने में मदद मिलेगी।

गतिविधि 1: हमेशा सत्य, कभी–कभी सत्य या कभी सत्य नहीं?

तैयारी

कथनों को एक सूची के रूप में दिया जा सकता है, या कार्ड पर लिखा जा सकता है और उन्हें यादृच्छिक रूप से साझा किया जा सकता है। प्रश्नों की एक पूरी सूची, और कार्यपत्रक का एक उदाहरण, जिसे कार्ड के रूप में काटा जा सकता है, संसाधन 2 और 3 में देखा जा सकता है। विभिन्न संख्या प्रणालियों और उनके गुणधर्मों की एक रूपरेखा संसाधन 4 में देखी जा सकती है।

इस गतिविधि में कार्य करने के तरीकों के लिए कुछ सुझाव नीचे दिए गए हैं:

- आप छात्र–छात्राओं को स्वयं कार्य करने, अपने विचार कक्षा को बताने या अपने विचार अपने साथी/सहपाठी से साझा करने को कह सकते हैं।
- कथन सभी को करने के लिए दिए जा सकते हैं – लेकिन यह थकाऊ हो सकता है, इसलिए छात्र–छात्राओं से उसका केवल एक भाग करने को कहें; उदाहरण के लिए, विषम/सम/अभाज्य संख्याएँ करने के लिए।
- आप छात्र–छात्राओं को उनकी अपनी पसंद चुनने को भी कह सकते हैं। उदाहरण के लिए, यदि वे ऐसी तीन चुनना चाहें, जिन्हें वे करना चाहेंगे और दो ऐसी जिन्हें वे नहीं करना चाहें, तो आप उन्हें अपने साथियों की सहायता से पूरी पाँच करने के लिए कह सकते हैं।
- छात्र–छात्राओं को अपनी पसंद चुनने देने से अक्सर कक्षा में सक्रिय भागीदारी और जुड़ाव सक्षम होता है।

गतिविधि

अपने छात्र–छात्राओं से पूछें कि निम्न में से कौन से कथन 'हमेशा सही हैं', 'कभी–कभी सही हैं' या 'कभी सही नहीं हैं', और क्यों?

1. दो प्राकृत संख्याओं का योग भी एक प्राकृत संख्या होता है।
2. दो पूर्णांकों का योग एक पूर्णांक नहीं होता।
3. दो अपरिमेय संख्याओं का अंतर एक अपरिमेय संख्या होता है।
4. दो अपरिमेय संख्याओं का गुणनफल एक अपरिमेय संख्या होता है।
5. दो पूर्ण संख्याओं का भागफल एक पूर्ण संख्या होता है।
6. दो वास्तविक संख्याओं का भागफल एक वास्तविक संख्या होता है।
7. पूर्ण संख्याओं के ऐसे अनंत युग्म होते हैं, जिनका योग 0 होता है।
8. पूर्ण संख्याओं का एक युग्म होता है, जिसका गुणनफल 1 होता है।
9. दो वास्तविक संख्याओं का गुणनफल एक दोहराव रहित, समाप्ति रहित दशमलव होता है।
10. किसी संख्या रेखा में किसी प्राकृत संख्या का सटीक स्थान निर्धारित नहीं किया जा सकता।
11. दो पूर्णांकों का अंतर, किसी संख्या रेखा पर दोनों पूर्णांकों में से प्रत्येक के बाईं ओर होता है।
12. दो प्राकृत संख्याओं के बीच परिमित प्राकृत संख्याएँ होती हैं।
13. यदि a एक प्राकृत संख्या है तो a^2 भी प्राकृत संख्या होती है।

14. संख्या ab a तथा b दोनों से बड़ी होती है।

	गतिविधि 1 का उपयोग कक्षा IX के BTBC book के पाठ परिशिष्ट 1 संख्या पद्धति और कक्षा X के NCERT book का परिशिष्ट 1, पृष्ठ 344 में पहले किया जा सकता है।

वीडियो: सीखने के लिए बातचीत

आप मुख्य संसाधन 'सीखने के लिए बातचीत' पर भी एक नजर डाल सकते हैं।

केस स्टडी 1: गतिविधि 1 के उपयोग का अनुभव श्रीमती नीलू बताती हैं

यह एक शिक्षिका की कहानी है, जिसने अपने माध्यमिक कक्षा के छात्र–छात्राओं के साथ गतिविधि 1 का प्रयास किया।

कई कारणों से इस गतिविधि को आजमाने में मुझे डर था:

- गतिविधि की असामान्य संरचना
- छात्र–छात्राओं के लिए उनके स्वयं के कारण तैयार करने की आवश्यकता
- छात्र–छात्रा आपस में बातचीत करते हैं, जबकि आमतौर पर इसकी मेरी कक्षा में अनुमति नहीं है
- मुझे डर है कि उन्हें विभिन्न संख्या प्रणालियों के बारे में शायद कुछ भी याद नहीं रहेगा!

यह गतिविधि शुरू करने से पहले, मैंने छह छात्र–छात्राओं को एक से 14 के बीच एक संख्या बताने को कहा। ये छह संख्याएँ वे प्रश्न बन गई जो उन्हें हल करना था। छात्र–छात्राओं को एक–दूसरे से बात करने की अनुमति देने के बारे में मुझे बहुत असहजता थी, क्योंकि मुझे लगा था कि कक्षा में 79 छात्र–छात्रा होने से बहुत शोरगुल का वातावरण हो जाएगा; क्या चर्चा हुई इसे नियंत्रित करना मेरे लिए मुश्किल हो जाएगा और सब अस्त–व्यस्त हो जाएगा। क्या होगा यदि प्रधानाध्यापक ऐसे अस्त–व्यस्तता के माहौल में पास से निकलें! दूसरी तरफ मेरा मानना है कि बातचीत से सीखने में मदद मिलती है, क्योंकि जब आप बात करते हैं, तो आपको अपनी सोच व्यवस्थित करनी होती है – अन्यथा श्रोता आपको समझेगा नहीं।

मैंने अपने आपको बहादुर बनाया और पाठ शुरू किया: मैंने छात्र–छात्राओं से कहा कि वे स्वयं शांतिपूर्वक उत्तर निकालें और अपने तर्क लिख लें। फिर मैंने उन्हें अपने साथी से अपने विचारों और तर्कों की चर्चा युग्म में करने को कहा। लेकिन यह उन्हें चुपचाप करना था, ताकि दूसरे यह न सुन पाएँ कि वे क्या कह रहे हैं और उनके विचार चुरा न लें! मैंने उन्हें कहा कि कुछ देर बाद यादृच्छिक रूप से किसी को चुना जाएगा और उसे युग्म की सोच के बारे में बताने को कहा जाएगा। अन्य छात्र–छात्रा तब रचनात्मक तरीके से टिप्पणी कर पाए, ठीक वैसे ही जैसे हम कभी–कभी पूरी कक्षा की चर्चा में करते हैं। मेरे इस डर के समाधान के लिए कि वे कुछ भी याद नहीं रख पाएँगे, मैंने ब्लैकबोर्ड पर पाठ्यपुस्तक के उन पृष्ठों के क्रमांक लिखे जहाँ उन्हें संख्या प्रणाली की जानकारी मिल सकती थी – और वे उन्हें देखने के लिए स्वतंत्र थे।

मुझे आश्चर्य हुआ कि इसने बहुत अच्छा काम किया! कक्षा में अव्यवस्था नहीं हुई। युग्म में बात करने से शोर हुआ, लेकिन वह अधिक नहीं था: उन्हें प्रतिस्पर्धा और गोपनीयता का बोध अच्छा लगा। मैंने इधर–उधर घूमकर और दीवार के सहारे खड़े रहकर निरीक्षण करते हुए बातचीत सुनी। मुझे सबसे अच्छी बात यह लगी की बातचीत गणित के बारे में थी, और उन असहमतियों से गणित गुणधर्मों पर सटीक चर्चाएँ हुई, जिनमें पाठ्यपुस्तकों से संदर्भ निकालना और अपनी बात को बताने के लिए संख्या रेखा का उपयोग करना शामिल था। पूरी कक्षा की चर्चा मेरे अनुमान से कम जीवंत थी,

क्योंकि तब तक थोड़ी–बहुत असहमति ही थी। हालाँकि, उपयोग की गई गणितीय भाषा से मुझे खुशी हुई। कक्षा की चर्चा एक समेकन गतिविधि बन गई। उनके जवाबों से मुझे पता लगा कि विभिन्न संख्या प्रणालियों में संक्रियाएँ करते समय वे गुणधर्मों के अंतर और इन अंतरों के परिणामों को वास्तव में समझ रहे थे।

इस बात में जो सबसे कठिन बात मुझे लगी वह थी एक शिक्षक के रूप में मेरी भूमिका में बदलाव। अब मैं उन्हें यह समझाने और बताने के लिए खड़ा नहीं था कि क्या करना है। वास्तव में, मैंने बहुत कम बात की और चर्चा में बीच में शामिल न होना और उन्हें बताना कि इसे कैसे करें, कठिन था। हालाँकि, इसका अर्थ है कि यह अब उनकी सीख है और उनका चिंतन है, जो कि एक सशक्त अनुभव था।

क्या मैं अगली बार कोई बदलाव करूँगी? हाँ, मैं कोशिश करूँगी कि वे अपन प्रश्न स्वयं चुनें, यद्यपि मुझे नहीं पता कि पूरी चर्चा का नेतृत्व कैसे किया जाएगा जब वे सभी अलग–अलग प्रश्न चुन लेंगे। शायद, मैं उन्हें उनके निष्कर्षों पर छोटी प्रस्तुतियां बनाने को कह सकती हूँ। मुझे लगता है कि मैं भी प्रश्नों को 'कार्ड' स्वरूप में तैयार करूँगी और इनका उपयोग तब करूँगी जब पाठ को समाप्त करने में पाँच या दस मिनट बचे होंगे। मुझे लगता है इससे वह दोहराव होगा जो इस पूरे ज्ञान को उनके दिमाग में रखने के लिए आवश्यक है, बिना इस बात का एहसास दिलाए कि पुस्तक से और अभ्यास किए जा रहे हैं।

अपने शिक्षण अभ्यास में दिखाना

जब आप अपनी कक्षा के साथ ऐसा कोई अभ्यास करें, तो बाद में बताएं कि क्या ठीक रहा और कहां गड़बड़ हुई। ऐसे सवाल की ओर ध्यान दें जिसमें छात्र–छात्राओं की रुचि दिखाई दे और वे आगे बढ़ते हुए नज़र आएं और वे जिनका स्पष्टीकरण करने की आवश्यकता हो। ऐसी बातें ऐसी 'स्क्रिप्ट' पता करने में सहायक होती हैं, जिससे आप छात्र–छात्राओं में गणित के प्रति रुचि जगा सकें और उसे मनोरंजक बना सकें। यदि वे कुछ भी समझ नहीं पाते हैं तथा कुछ भी नहीं कर पाते हैं, तो वे शामिल होने में कम रुचि लेंगे। जब भी आप गतिविधियां करें, इस चिंतनशील अभ्यास का उपयोग करें यह ध्यान देते हुए, जैसे श्रीमती नीलू ने किया, कि कुछ छोटी–छोटी चीजों से काफी फर्क पड़ता है।

ज़रा सोचिए

ऐसे चिंतन को गति देने वाले अच्छे सवाल हैं:

- आपकी कक्षा कैसी रही?
- छात्र–छात्राओं से किस प्रकार की प्रतिक्रिया अपेक्षित नहीं थी? क्यों?
- क्या आपको लगा कि आपको किसी समय हस्तक्षेप करना होगा?
- किन बिंदुओं पर आपको लगा कि आपको और समझाना होगा?
- क्या आपने किसी भी रूप में काम को संशोधित किया? यदि ऐसा है, तो आपने ऐसा किस कारण से किया?

2 कल्पनाशीलता पर कार्य करना

डॉर्फलर (1991) और वान हैली (1986) के शोध से पता चलता है कि कल्पना करना गणित को सीखने का एक सशक्त हथियार है। (आप *कल्पना चित्रण का उपयोग करना: बीजगणितीय तत्समक* इकाई में कल्पना चित्रण के बारे में अधिक जान सकते हैं।) हालाँकि, अधिकांश कल्पना चित्रण निरूपणों में गणित में उनके उपयोग के संबंध में सीमाएँ होती हैं। छात्र–छात्राओं को इस बारे में जानकारी रखना होगी कि किसी विशेष प्रयोजन के लिए किस कल्पना चित्र निरूपण का उपयोग करना है।

गतिविधि 2 में छात्र–छात्रा संख्या रेखा के लिए इन सीमाओं की खोज करेंगे। गतिविधि में छात्र–छात्राओं से विभिन्न संख्या प्रकारों की गुणधर्म पहचानने को कहा जाता है। यह उन्हें अपने उदाहरणों में चयन के विकल्प भी देता है, जिससे भाग लेने वाले छात्र–छात्रा को अपने स्वामित्व का बोध होता है।

गतिविधि 2: संख्या रेखा पर संख्याएँ दर्शाना

तैयारी

यह गतिविधि उन छात्र–छात्राओं के लिए बेहतर काम करती है, जो युग्मों या छोटे समूहों में काम करते हैं, ताकि विचारों और अभिमतों को आसानी से साझा किया और चुनौती दी जा सके। यदि आपके छात्र–छात्रा इस तरह से काम करने के अभ्यस्त नहीं हैं, तो आपको यह योजना बनानी होगी कि उन्हें युग्मों और छोटे समूहों में किस तरह व्यवस्थित किया जाएगा, ताकि वे आसानी से एक–दूसरे से बात कर सकें।

गतिविधि

अपने छात्र–छात्राओं को निम्नानुसार बताएँ:

- संख्या रेखा पर ये संख्याएँ एकदम सही अंकित करें:
  - 2 – 4
  - 18 / 4
  - √2
  - 17 / 3
- क्या आप परिणामों से खुश हैं? क्या आप उन सभी को एकदम सही स्थान पर रख पाएँगे? आपको कैसे पता?
- क्या आपको ऐसी अन्य संख्याएँ पता हैं, जिन्हें संख्या रेखा पर दिखाना कठिन या आसान है?

गतिविधि 2 का उपयोग कक्षा IX के BTBC book के पाठ परिशिष्ट 1 संख्या पद्धति पाठ के (1.4 संख्या रेखा पर वास्तविक संख्याओं का निरूपण) में पहले किया जा सकता है।

केस स्टडी 2: गतिविधि 2 के बारे में शिक्षक अभय अपने अनुभव बताते हैं

मैंने स्वयं गतिविधि 2 को आजमाया और उसमें शिक्षण की संभावना देखी। हालाँकि यह वैसी गतिविधि नहीं थी जिसे हम विद्यालय में करते हैं, इसलिए मैं बहुत आशंकित था। मैं बताऊँगा कि मैंने उस आशंका को कैसे दूर किया और मेरे अनुभव ने मेरे छात्र–छात्राओं के लिए इस गतिविधि की मेरी योजना पर किस प्रकार प्रभाव डाला।

चूँकि मुझे सीधे अपनी कक्षा के छात्र–छात्राओं के साथ इस गतिविधि को उपयोग करने का साहस नहीं हुआ, इसलिए मैंने पहले इसे अपने साथियों पर आजमाना चाहा। मैंने अपने साथियों, जिनमें से कुछ गणित शिक्षक नहीं थे, को संख्या रेखा पर संख्याएँ चिह्नित करने को कहा। फिर मैंने उनसे पूछा कि उन्होंने यह कैसे किया। पूर्ण और परिमेय–सांत संख्याओं को दर्शाने की उनकी विधियाँ समान थीं, लेकिन परिमेयrational and non-terminating (असांत) और अपरिमेय संख्याओं को चिह्नित करने की उनकी विधियाँ अलग–अलग थीं। उदाहरण के लिए, कुछ संख्याओं के लिए उन्होंने दशमलव का उपयोग किया, जबकि अन्य के लिए उन्होंने रचना का उपयोग किया। बाद में इस बारे में एक चर्चा हुई कि क्या इन संख्याओं को किसी संख्या रेखा पर ठीक–ठीक रखा जा सकता है, और कल्पना चित्रण के रूप में संख्या रेखा की क्या–क्या सीमाएँ होती हैं।

अपने सहकर्मियों को पहले इस कार्य को करने, और फिर उसके बारे में बताने के लिए कहने से मुझे अपने कक्षा 9 के छात्र–छात्राओं के लिए पाठ की योजना बनाने में बहुत मदद मिली। मैंने देखा कि मेरे सहकर्मियों ने एक–दूसरे को सुनकर सीखा। मैंने उन्हें नहीं बताया कि कैसे करना है। इसने मुझे सोचने पर मजबूर किया कि क्या मेरे छात्र–छात्रा भी इसी तरह सीख पाएँगे? किस बात पर मैंने सोचा कि उनकी सीख कुछ अलग हो सकती है?

मैंने तय किया कि मेरे छात्र–छात्रा भी अपनी सहपाठियों से सीखें, ताकि वे जान सकें कि कौन–कौन सी विधियाँ हैं

और उनकी प्रभावशीलता और सीमाओं के बारे में सोच सकें, जैसा कि मेरे सहकर्मियों ने किया। इसका अर्थ यह हुआ कि मुझे यह पक्का करने के लिए अपनी पाठ योजना ग्रहण करनी पड़ी कि उसमें ज्ञान के आदान प्रदान का अवसर मिले, अर्थात मुझे साझाकरण समय की योजना बनानी पड़ी।

इसलिए काम को स्वयं करके मुझे विश्वास हो गया था कि यह सीखने के अत्यधिक अवसरों वाला एक प्रेरक कार्य है। अपने सहकर्मियों को यह कार्य करने को कहने से मुझे मेरी कक्षा के साथ इसे आजमाने की मेरी चिंता को शांत करने में मदद मिली। उनके जवाबों को सुनकर मैंने सीखने–सिखाने की अपनी मान्यताओं पर ही प्रश्न किए और मैं सीखने–सिखाने की प्रक्रिया की भिन्न तकनीकों के बारे में सोचने को प्रेरित हुआ, ताकि साझा शिक्षण हो सके। अपने 'नए' विचारों को आजमाने के लिए मैं कुछ नए पाठों की योजना भी बनाऊँगा।

ज़रा सोचिए

- अपने छात्र–छात्राओं की समझ का पता लगाने के लिए आपने क्या सवाल किए?
- छात्र–छात्राओं से किस प्रकार की प्रतिक्रिया अपेक्षित नहीं थी? क्यों?
- क्या आपने किसी भी रूप में काम को संशोधित किया? यदि ऐसा है, तो आपने ऐसा किस कारण से किया?

वीडियो: सीखने की योजना बनाना

अधिक जानकारी के लिए, संसाधन 5, 'सीखने की योजना बनाना' पढ़ें।

3 समानता और असमानता की गतिविधियाँ बनाना – मौजूदा अभ्यास में छोटे–छोटे बदलाव करना

नए सीखने–सिखाने के विचारों के बारे में पढ़ना रोमांचक और वांछनीय हो सकता है, लेकिन यह मौजूदा व्यवहारों में शामिल कैसे होगा? केस स्टडी के शिक्षकों की तरह, आप इस इकाई या अन्य स्रोतों से गतिविधियों का उपयोग कर सकते हैं और उन्हें अपने सीखने–सिखाने के व्यवहारों में शामिल करने के लिए ग्रहण कर सकते हैं। कभी–कभी छोटे बदलाव भी सीखने–सिखाने की गुणवत्ता और निपुणता पर अत्यधिक प्रभाव डालते हैं।

अगली गतिविधि एक योजना गतिविधि है, जो पाठ्यपुस्तक के उपयोग के मौजूदा व्यवहार में छोटे–छोटे बदलावों पर केंद्रित है। इसमें पाठ को तैयार करने के लिए थोड़ा अधिक समय लगता है, लेकिन इससे शिक्षण समय की अत्यधिक बचत होती है, क्योंकि पुस्तक के अभ्यासों का उपयोग अधिक दक्षता से होता है और ध्यान इस बात पर रहता है कि क्या सीखा जा सकता है। ,कुछ प्रश्न तैयार रखने से अच्छी शुरुआत होती है, जिससे छात्र–छात्रा समानता और असमानता पता कर पाएँगे। इन्हें आपकी मेज पर कागज के टुकड़े पर लिखकर रखा जा सकता है या दीवार पर लगाया जा सकता है। इन प्रश्नों का उपयोग किसी भी पाठ में किसी भी बिंदु पर बार–बार किया जा सकता है। कुछ आसान लेकिन अच्छे प्रश्न ये हैं:

- क्या समान है और क्या असमान है?
- क्या आप ऐसा एक और प्रश्न बना सकते हैं?
- क्या आप एक कठिन प्रश्न और एक आसान प्रश्न बना सकते हैं?
- आपको कैसे पता?

गतिविधि 3: पाठ्यपुस्तक के प्रश्नों को ग्रहण करने की योजना

जिस पाठ्यपुस्तक का आप उपयोग करते हैं, उसमें विभिन्न संख्या प्रणालियों में काम करने के अभ्यासों पर नजर डालें।

1. इन प्रश्नों में क्या समान है और क्या असमान है?
2. आप इन प्रश्नों में छोटे–छोटे बदलाव कैसे करेंगे ताकि ये आपको समानता और असमानता पता करने में मदद करें?
3. आप इन प्रश्नों को अपने छात्र–छात्राओं को कैसे बताएँगे, ताकि ये उन्हें समानता और असमानता पता करने में मदद करें?
4. जब आप इन पाठों को पढ़ाते समय उपयोग किए जाने वाले नोट्स बना लें। अपने विचारों को दूसरे शिक्षकों के साथ साझा करने से आप विभिन्न पाठों के लिए सुझावों की एक सूची बना पाएँगे।

आप संसाधन 6 में ग्रहण किए गए पाठ्यपुस्तक प्रश्नों का एक उदाहरण देख सकते हैं।

गतिविधि 3 का उपयोग कक्षा IX के BTBC book में इकाई 1.5 और 1.6 में पहले किया जा सकता है।

केस स्टडी 3: शिक्षक आनंद गतिविधि 3 के बारे में अपने विचार बताते हैं

मैं ग्रामीण क्षेत्र में माध्यमिक कक्षाओं को पढ़ाता हूँ, जहाँ हर कक्षा में लगभग 80 बच्चे होते हैं। कक्षा को पढ़ाने से पहले आमतौर पर मैं किसी अध्याय के किसी विशेष अभ्यास में दिए प्रश्नों पर सावधानीपूर्वक एक नजर डालता हूँ। गतिविधि में बताई विधि से मैंने कभी भी प्रश्नों पर विचार नहीं किया। यह बहुत आसान लगा। मैंने अधिक ध्यान देने की अपेक्षा नहीं की थी, क्योंकि मुझे लगा कि पुस्तकें अच्छी हैं और छात्र–छात्राओं के सामने गणितीय विचारों को धीरे–धीरे, चरण दर चरण प्रस्तुत करती हैं। हालाँकि मुझे बार–बार इस बात से चिढ़ होती है कि छात्र–छात्राओं को यह याद रखने में कठिनाई होती है कि पिछले पाठ में, पिछले सप्ताह, पिछले माह या पिछले वर्ष उन्होंने क्या पढ़ा था और अक्सर वे परीक्षा में भी वैसा नहीं कर पाते जैसा मैं उनसे अपेक्षा करता हूँ! उन्होंने विभिन्न संख्या प्रणालियों के बीच के अंतर पर ध्यान क्यों नहीं दिया, उदाहरण स्वरूप?

तो इस अवसर पर, मैंने NCERT की कक्षा 9 के लिए अध्याय 'संख्या प्रणाली' को देखा, विशेष रूप से अभ्यास 9.3। मैंने इस बारे में सोचा कि इन प्रश्नों में क्या समान है और क्या असमान है: मैंने ध्यान दिया कि प्रश्न 1 में भिन्नात्मक रूप से दशमलव रूप में रूपांतरण है; प्रश्न 3 में इसका ठीक उल्टा पूछा गया है। मैंने एक छोटा सा बदलाव करने के बारे में सोचा और इन दोनों प्रश्नों को मिला दिया। दो अलग–अलग प्रश्नों के बजाय, जिनके बीच अन्य प्रश्न भी था, छात्र–छात्राओं को अब 65/100 और 13/99 को दशमलव रूप में और फिर दशमलव रूपों को वापस भिन्नात्मक रूप में बदलने को कहा गया। मैंने सोचा कि इससे उन्हें दशमलव और भिन्नों की अवधारणाओं को जोड़कर देखने, संबंध स्थापित करने में मदद मिलेगी और वे इन दोनों अवधारणाओं के बारे में अलग–अलग नहीं सोचेंगे।

यह स्थिति वास्तव में दिखाई दी। इससे अधिक, छात्र–छात्राओं को यह प्रश्न पूछकर कि 'क्या समान है, क्या असमान है?' और 'आपको कैसे पता?', अवसानी (सांत) और अनवसानी (असांत) दशमलवों में समानता और अंतर पहचान पा रहे थे, और यह व्याख्या कर पा रहे थे कि वे कैसे अलग हैं।

प्रतिफल के रूप में, मैंने सोचा कि पाठ्यपुस्तक में दिए प्रश्नों पर एक आलोचनात्मक नजर डालना महत्वपूर्ण है। स्वयं से यह पूछकर कि 'क्या समानता है और क्या असमानता है?' मैं प्रश्नों की संरचना में अंतर और उनके द्वारा दिए जाने वाले सीखने–सिखाने के अवसर देख सकता था।

ज़रा सोचिए

इस इकाई में आपके द्वारा उपयोग किए गए तीन विचार पहचानें जो अन्य विषयों को पढ़ाने में भी काम करेंगे। उन दो विषयों पर एक नोट बनाएँ जो आपको शीघ्र ही पढ़ाने हैं, जहाँ थोड़े से बदलाव के साथ उन विचारों का उपयोग किया जा सकता है।

4 सारांश

इस इकाई में इस सीखने–सिखाने की प्रक्रिया का अन्वेषण किया गया है कि विभिन्न संख्या प्रणालियों में क्या समानता और असमानता हैं और जोड़, गुणा, घातांक आदि गणितीय संक्रियाएँ इनमें कैसे कार्य करती हैं। महत्वाकांक्षी लक्ष्यों के रूप में NCF (2005) तथा NCFTE (2009) से सीखने–सिखाने की आवश्यकताओं का उपयोग किया गया। गणितीय पाठों को रोचक, बाल केंद्रित, छात्र–छात्रा सहभागी और गणित की समझ बढ़ाने वाले बनाने के लिए यह इकाई कल्पना चित्रण का उपयोग करके समानता और असमानता के कार्यों के शैक्षणिक तरीकों के विकास पर केंद्रित है। इस इकाई में इस बात की चर्चा भी की गई है कि किस प्रकार पाठ्यपुस्तक का उपयोग करके मौजूदा कक्षा सीखने–सिखाने की प्रक्रिया में छोटे बदलावों की योजना किस प्रकार बनाई जा सकती है।

संसाधन

संसाधन 1: NCF/NCFTE शिक्षण आवश्यकताएं

इस इकाई की सीख नीचे बताई गई NCF (2005) और NCFTE (2009) की शिक्षण आवश्यकताओं से जुड़ी है:

- शिक्षार्थियों को उनके सीखने में सक्रिय प्रतिभागी के रूप में देखें न कि सिर्फ ज्ञान प्राप्त करने वाले के रूप में; ज्ञान निर्माण के लिए उनकी क्षमताओं को प्रोत्साहित करें; रोट पद्धतियों (रटना) से शिक्षण को दूर ले जाएं।
- पाठ्यचर्या, पाठ्यक्रम और पाठ्यपुस्तकों से उनका आलोचनात्मक परीक्षण करते हुए जुड़ें, न कि बिना प्रश्न किए उन्हें 'दिया गया' और स्वीकृत मान लें।
- छात्र–छात्राओं को गणित को किसी ऐसी चीज़ के रूप में लेने दें, जिसके बारे में वे बात करें, जिसके द्वारा संवाद करें, जिसकी आपस में चर्चा करें, जिसपर साथ मिलकर कार्य करें।
- संबंध स्थापित करने, संरचनाएँ देखने, समस्याओं का पता लगाने, कथनों की सत्यता या असत्यता पर तर्क देने के लिए छात्र–छात्राओं को अमूर्त कल्पनाओं का उपयोग करने दें।

संसाधन 2: गतिविधि 1 के लिए कथनों की पूरी सूची

यहाँ पर उन कथनों की व्यापक (लेकिन समग्र नहीं) सूची दी गई है, जिनका उपयोग गतिविधि 1 के लिए किया जा सकता है। वह क्षेत्र (संक्रियाएँ, कौन सी संख्या प्रणालियाँ आदि) चुनें जिनपर आप अपने छात्र–छात्राओं से काम करवाना चाहेंगे। छात्र–छात्राओं से पूछा जाता है कि निम्न में से कौन से कथन 'हमेशा सत्य हैं', 'कभी–कभी सत्य हैं' या 'कभी सत्य नहीं हैं' और उनसे इसका कारण बताने को कहा जाता है।

समापन के गुण पर कार्य करना (working on the closure property)

1. दो प्राकृत संख्याओं का योग/अंतर/गुणा/भाग एक प्राकृत संख्या होती है।
2. दो पूर्ण संख्याओं का योग/अंतर/गुणा/भाग एक पूर्ण संख्या होती है।
3. दो पूर्णांकों का योग/अंतर/गुणा/भाग एक पूर्णांक नहीं होता।
4. दो परिमेय संख्याओं का योग/अंतर/गुणा/भाग एक परिमेय संख्या होती है।
5. दो अपरिमेय संख्याओं का योग/अंतर/गुणा/भाग एक अपरिमेय संख्या होती है।
6. दो वास्तविक संख्याओं का योग/अंतर/गुणा/भाग एक वास्तविक संख्या होती है।

व्युत्क्रमों पर कार्य करना

1. अपरिमेय संख्याओं के ऐसे अनंत युग्म हैं, जिनका योग/गुणा 0 (या 1) होता है।
2. परिमेय संख्याओं के ऐसे अनंत युग्म हैं, जिनका योग/गुणा 0 (या 1) होता है।
3. पूर्णांकों के ऐसे अनंत युग्म हैं, जिनका योग/गुणा 0 (या 1) होता है।
4. पूर्ण संख्याओं के ऐसे अनंत युग्म हैं, जिनका योग/गुणा 0 (या 1) होता है।
5. पूर्ण संख्याओं का एक ऐसा युग्म है, जिनका योग/गुणा 0 (या 1) होता है।

दशमलव प्रतिरूपणों पर कार्य करना

1. किसी अवसानी (सांत) दशमलव को किसी पूर्णांक के शून्येतर पूर्णांक पर अनुपात के रूप में दिखाया जा सकता है।
2. किसी अनअवसानी (असांत) दशमलव को किसी पूर्णांक के अशून्य पूर्णांक पर अनुपात के रूप में दिखाया जा सकता है।
3. किसी पुनरावर्ती दशमलव को किसी पूर्णांक के अशून्य पूर्णांक पर अनुपात के रूप में दिखाया जा सकता है।
4. किसी गैर–पुनरावर्ती दशमलव को किसी पूर्णांक के अशून्य पूर्णांक पर अनुपात के रूप में दिखाया जा सकता है।
5. किसी परिमेय और अपरिमेय संख्या का योग एक पुनरावर्ती दशमलव होता है।
6. दो वास्तविक संख्याओं का योग एक गैर–पुनरावर्ती, अनवसानी (असांत) दशमलव होता है।
7. किसी परिमेय और अपरिमेय संख्या का गुणा एक पुनरावर्ती दशमलव होता है।
8. दो वास्तविक संख्याओं का गुणनफल एक दोहराव रहित, समाप्ति रहित दशमलव होता है।
9. किसी परिमेय और अपरिमेय संख्या का गुणा एक पुनरावर्ती दशमलव होता है।
10. दो वास्तविक संख्याओं का गुणनफल एक दोहराव रहित, समाप्ति रहित दशमलव होता है।

किसी संख्या रेखा पर संख्याओं का पता लगाना

1. किसी संख्या रेखा पर किसी प्राकृत संख्या/पूर्णांक के सही–सही स्थान का निर्धारण नहीं किया जा सकता।
2. किसी संख्या रेखा पर किसी पूर्णांक के सही–सही स्थान का निर्धारण नहीं किया जा सकता।
3. किसी संख्या रेखा पर किसी परिमेय संख्या के सही–सही स्थान का निर्धारण किया जा सकता है।
4. किसी संख्या रेखा पर किसी अपरिमेय संख्या के सही–सही स्थान का निर्धारण किया जा सकता है।
5. किसी संख्या रेखा पर किसी वास्तविक संख्या के सही–सही स्थान का निर्धारण किया जा सकता है।
6. दो प्राकृत संख्याओं का योग, किसी संख्या रेखा पर उन दोनों संख्याओं में से प्रत्येक के दाईं ओर होता है।
7. दो पूर्णांकों का अंतर, किसी संख्या रेखा पर दोनों पूर्णांकों में से प्रत्येक के बाईं ओर होता है।
8. दो वास्तविक संख्याओं का योग, किसी संख्या रेखा पर उन दोनों संख्याओं में से प्रत्येक के दाईं ओर होता है।
9. दो पूर्णांकों का भागफल किसी संख्या रेखा पर उन दोनों पूर्णांकों में से प्रत्येक के बाईं ओर होता है।
10. किसी संख्या रेखा पर दो वास्तविक संख्याओं के बीच अनंत वास्तविक संख्याएँ होती हैं।
11. किसी संख्या रेखा पर दो वास्तविक संख्याओं के बीच परिमित प्राकृत संख्याएँ होती हैं।
12. किसी संख्या रेखा पर दो परिमेय संख्याओं के बीच अनंत अपरिमेय संख्याएँ होती हैं।
13. दो पूर्ण संख्याओं के बीच कम से कम एक पूर्ण संख्या होती है।

चरघातांकन (exponentiation)

1. यदि a एक प्राकृत संख्या/पूर्णांक है तो a^2 भी प्राकृत संख्या होती है।
2. हर वास्तविक संख्या के लिए a^2 धनात्मक संख्या होती है।
3. संख्या ab, a तथा b दोनों से बड़ी होती है।

संसाधन 3: 'कार्ड' स्वरूप में गतिविधि 1

इस संसाधन में गतिविधि 1 के कथन इस रूप में प्रस्तुत किए गए हैं, जिन्हें कागज या कार्ड पर मुद्रित करके काटा जा सकता है। इन छोटे–छोटे कार्डों को फिर छात्र–छात्राओं को यादृच्छिक रूप से कार्य करने के लिए दिया जा सकता है। उन्हें लंबी गतिविधि के रूप में उपयोग किया जा सकता है, या पाँच या दस मिनट की छोटी गतिविधि के रूप में उपयोग किया जा सकता है।

दो प्राकृत संख्याओं का योग एक प्राकृत संख्या होता है	दो पूर्णांकों का योग पूर्णांक नहीं होता	दो अपरिमेय संख्याओं का अंतर एक अपरिमेय संख्या होता है
दो अपरिमेय संख्याओं का गुणनफल एक अपरिमेय संख्या होता है	दो पूर्ण संख्याओं का भागफल एक पूर्ण संख्या होता है	दो पूर्ण संख्याओं का भागफल वास्तविक संख्या एक संख्या होता है
पूर्ण संख्याओं के ऐसे अनंत युग्म होते हैं जिनका योग 0 होता है	पूर्ण संख्याओं का एक ऐसा युग्म है जिसका गुणनफल 1 होता है	दो वास्तविक संख्याओं का गुणनफल गैर–पुनरावर्ती, अनवसानी दशमलव होता है
किसी संख्या रेखा पर किसी प्राकृत संख्या के सही–सही स्थान का निर्धारण नहीं किया जा सकता	दो पूर्णांकों का अंतर किसी संख्या रेखा पर उन दोनों पूर्णांकों में से प्रत्येक के बाईं ओर होता है	दो वास्तविक संख्याओं के बीच परिमित प्राकृत संख्याएँ होती हैं

संख्या a^2 एक प्राकृत संख्या होती है यदि a एक प्राकृत संख्या है	संख्या ab a और b दोनों से बड़ी होती है	अपना स्वयं का कथन बनाएँ

चित्र R2.1 कार्ड स्वरूप में गतिविधि 1 के कथन।

संसाधन 4: संख्या प्रणालियाँ और उनके गुणधर्म

तालिका R3.1 में विभिन्न संख्या प्रणालियों में संख्याओं पर संक्रियाओं के गुणधर्म की रूपरेखा दी गई है। आप अपने छात्र–छात्राओं से 'हाँ' या 'नहीं' भरने को कह सकते हैं।

तालिका R3.1 *संख्या प्रणालियाँ और उनके गुणधर्म।*

संख्याओं पर संक्रियाओं के गुण	संख्या प्रणाली					
	प्राकृत	**पूर्ण**	**पूर्णांक**	**परिमेय**	**अपरिमेय**	**वास्तविक**
योग के अंतर्गत बंद: यदि a, b किसी समुच्चय में शामिल हैं, तो a + b भी समुच्चय में शामिल होगा।	हाँ	हाँ	हाँ	हाँ	नहीं	हाँ
योज्य तत्समक: किसी समुच्चय के भाग के लिए, समुच्चय में z एक संख्या होती है, जैसे a + z = a।	नहीं	हाँ	हाँ	हाँ	नहीं	हाँ
योज्य व्युत्क्रम: समुच्चय में हर संख्या a के लिए, समुच्चय में एक अन्य संख्या –a होती है जैसे a + (– a) = z।	नहीं	नहीं	हाँ	हाँ	नहीं	हाँ
गुणन के अंतर्गत बंद यदि a, b किसी समुच्चय में शामिल हैं, तो a × b भी समुच्चय में शामिल होगा।	हाँ	हाँ	हाँ	हाँ	नहीं	हाँ
गुणात्मक तत्समक: किसी समुच्चय के भाग के लिए, समुच्चय में u एक संख्या होती है, जैसे a × u = a.।	हाँ	हाँ	हाँ	हाँ	नहीं	हाँ

गुणात्मक व्युत्क्रम: समुच्चय में हर संख्या a के लिए, समुच्चय में एक अन्य संख्या a^{-1} होती है जैसे $a \times a^{-1} = u$. ।	नहीं	नहीं	नहीं	हाँ	नहीं	हाँ

संसाधन 5: सीखने की योजना

अपने पाठों संबंधी अवधारणाओं की योजना और उनकी तैयारी क्यों महत्वपूर्ण है

अच्छे पाठों संबंधी अवधारणाओं की योजना (सीखने की योजना) बनाना ज़रूरी होता है। योजना बनाने से आपके पाठों संबंधी अवधारणाओं को अधिक स्पष्ट और सुनियोजित करने में मदद मिलती है, जिसका अर्थ यह है कि छात्र–छात्रा सक्रिय होते हैं और इसमें रुचि लेते हैं। प्रभावी नियोजन में कुछ अंतर्निहित लचीलापन भी शामिल होता है ताकि शिक्षक/शिक्षिका पढ़ाते समय अपने छात्र–छात्राओं की अधिगम-प्रक्रिया के बारे में कुछ पता चलने पर उसके प्रति अनुक्रिया कर सकें। पाठों संबंधी अवधारणाओं की श्रृंखला के लिए सीखने की योजना पर काम करने में छात्र–छात्राओं और उनके पूर्व-ज्ञान को जानना, पाठ्यचर्या के माध्यम से प्रगति के क्या अर्थ है, और छात्र–छात्राओं के पढ़ने में मदद करने के लिए सर्वोत्तम संसाधनों और गतिविधियों की खोज करना शामिल होता है।

नियोजन एक सतत् प्रक्रिया है जो आपको अलग-अलग पाठों में शामिल अवधारणा, उपअवधारणा और साथ ही, एक के ऊपर एक विकसित होते पाठों में शामिल अवधारणा,उपअवधारणा की श्रृंखला, दोनों की तैयारी करने में मदद करती है। पाठ संबंधी सीखने की योजना के चरण ये हैं:

- इस बारे में स्पष्ट रहना कि प्रगति करने के लिए आपके छात्र–छात्राओं के लिए क्या आवश्यक है
- तय करना कि आप कौन से ऐसे तरीके से सिखाने जा रहे हैं जिसे छात्र–छात्रा समझेंगे और आपको जो पता लगेगा उसके प्रति अनुक्रिया करने के लचीलेपन को कैसे बनाए रखेंगे
- पीछे मुड़कर देखना कि अध्याय में दी गई अवधारणा संबंधी योजना कितनी अच्छी तरह से चली और आपके छात्र–छात्राओं ने क्या सीखा ताकि भविष्य के लिए योजना बना सकें।

पाठ संबंधी अवधारणाओं के श्रृंखला की योजना बनाना

जब आप किसी पाठ्यचर्या का पालन करते हैं, तो नियोजन का पहला भाग यह निश्चित करना होता है कि पाठ्यक्रम के विषयों और प्रसंगों से संबंधित अवधारणाओं को खंडों या टुकड़ों में किस सर्वोत्तम ढंग से विभाजित किया जाय। आपको छात्र–छात्राओं के प्रगति करने तथा कौशलों और ज्ञान का क्रमिक रूप से विकास करने के लिए उपलब्ध समय और तरीकों पर विचार करना होगा। आपके अनुभव या सहकर्मियों के साथ चर्चा से आपको पता चल सकता है कि किसी अवधारणा के लिए चार कालांश लगेंगे, लेकिन किसी अन्य अवधारणा के लिए केवल दो। आपको इस बात से अवगत रहना चाहिए कि आप भविष्य में उसे सिखाने पर अलग तरीकों से और अलग अलग समयों पर तब लौट सकते हैं, जब अन्य अवधारणाएँ सिखाई जाएंगीं या अवधारणा को विस्तारित किया जाएगा।

सभी सीखने की योजनाओं में आपको निम्न बातों के बारे में स्पष्ट रहना होगा:

- छात्र–छात्राओं को आप क्या सिखाना चाहते हैं
- आप उस अधिगम बिन्दु/अवधारणा का परिचय कैसे देंगे
- छात्र–छात्राओं को क्या और क्यों करना होगा।

आप सिखाने को सक्रिय और रोचक बनाना चाहेंगे ताकि छात्र–छात्रा सहज और उत्सुक महसूस करें। इस बात पर विचार करें कि पाठों की श्रृंखला में छात्र–छात्राओं से क्या करने को कहा जाएगा ताकि आप न केवल विविधता और रुचि बल्कि लचीलापन भी बनाए रखें। योजना बनाएं कि जब आपके छात्र–छात्रा पाठों की श्रृंखला में से प्रगति करेंगे तब आप उनकी समझ की जाँच कैसे करेंगे। यदि कुछ भागों को अधिक समय लगता है या वे जल्दी समझ में आ जाते हैं तो समायोजन करने के लिए तैयार रहें।

अलग-अलग पाठों से संबंधित अवधारणाओं की तैयारी करना

पाठों से संबंधित अवधारणाओं की श्रृंखला को नियोजित कर लेने के बाद, प्रत्येक अवधारणा को उसकी प्रगति के आधार पर अलग से नियोजित करना होगा जो छात्र–छात्राओं ने उस बिंदु तक की है। आप जानते हैं या पाठों से संबंधित अवधारणाओं की श्रृंखला के अंत में यह आप जान सकेंगे कि छात्र–छात्राओं ने क्या सीख लिया होगा, लेकिन आपको किसी अप्रत्याशित चीज को फिर से दोहराने या अधिक शीघ्रता से आगे बढ़ने की जरूरत हो सकती है। इसलिए हर पाठ से संबंधित अवधारणा को अलग से नियोजित करना चाहिए ताकि आपके सभी छात्र–छात्रा प्रगति करें और सफल तथा सम्मिलित महसूस करें।

पाठ से संबंधित अवधारणा की योजना के भीतर आपको सुनिश्चित करना चाहिए कि प्रत्येक गतिविधि के लिए पर्याप्त समय है और सभी संसाधन तैयार हैं, जैसे क्रियात्मक कार्य या सक्रिय समूहकार्य के लिए। बड़ी कक्षाओं के लिए सामग्रियों के नियोजन के हिस्से के रूप में आपको अलग अलग समूहों के लिए अलग अलग प्रश्नों और गतिविधियों की योजना बनानी पड़ सकती है।

जब आप नई अवधारणा सिखाते हैं, आपको आत्मविश्वासी होने के लिए अभ्यास करने और अन्य शिक्षक/शिक्षिकाओं के साथ विचारों पर बातचीत करने के लिए समय की जरूरत पड़ सकती है।

तीन भागों में अपने पाठों से संबंधित अवधारणाओं की योजना को तैयार करने के बारे में सोचें। इन भागों पर नीचे चर्चा की गई है।

1 परिचय

सिखाने की प्रक्रिया के शुरू में, छात्र–छात्राओं को समझाएं कि वे क्या सीखेंगे और करेंगे, ताकि सभी को पता रहे कि उनसे क्या अपेक्षित है। छात्र–छात्रा पहले से ही जो जानते हैं उन्हें उसे साझा करने की अनुमति देकर वे जो करने वाले हों उसमें उनकी दिलचस्पी पैदा करें।

2 योजना का मुख्य भाग

छात्र–छात्रा जो कुछ पहले से जानते हैं उसके आधार पर सामग्री की रूपरेखा बनाएं। आप स्थानीय संसाधनों, नई जानकारी या सक्रिय पद्धतियों के उपयोग का निर्णय ले सकते हैं जिनमें समूहकार्य या समस्याओं का समाधान करना शामिल है। अपनी कक्षा में आप जिन संसाधनों और तरीकों का उपयोग करेंगे, उनकी पहचान करें। विविध प्रकार की गतिविधियों, संसाधनों, और समयों का उपयोग सीखने की योजना का महत्वपूर्ण हिस्सा है। यदि आप विभिन्न पद्धतियों और गतिविधियों का उपयोग करते हैं, तो आप अधिक छात्र–छात्राओं तक पहुँचेंगे, क्योंकि वे भिन्न तरीकों से सीखेंगे।

3 अधिगम की जाँच कर के सीखने की योजना की समाप्ति

हमेशा यह पता लगाने के लिए समय (सीखने के दौरान या उसकी समाप्ति पर) रखें कि कितनी प्रगति की गई है। जाँच करने का अर्थ हमेशा परीक्षा ही नहीं होता है। आम तौर पर उसे शीघ्र और उसी जगह पर होना चाहिए – जैसे नियोजित प्रश्न या छात्र–छात्राओं को जो कुछ उन्होंने सीखा है उसे प्रस्तुत करते देखना – लेकिन आपको लचीला होने के लिए और छात्र–छात्राओं के उत्तरों से आपको जो पता चलता है उसके अनुसार परिवर्तन करने की योजना बनानी चाहिए।

सीखने की योजना को समाप्त करने का एक अच्छा तरीका हो सकता है शुरू के लक्ष्यों पर वापस लौटना और छात्र–छात्राओं को इस बात के लिए समय देना कि वे एक दूसरे को और आपको उस शिक्षण से हुई उनकी प्रगति के बारे में बता सकें।

छात्र–छात्राओं की बात को सुनकर आप सुनिश्चित कर सकेंगे कि आपको पता रहे कि अगली अवधारणा/उपअवधारणा के लिए क्या योजना बनानी है।

सीखने की योजना की समीक्षा करना

हर सीखने की योजना का पुनरावलोकन करें और इस बात को दर्ज करें कि आपने क्या किया, आपके छात्र–छात्राओं ने क्या सीखा, किन संसाधनों का उपयोग किया गया और सब कुछ कितनी अच्छी तरह से संपन्न हुआ ताकि आप अगले अवधारणाओं/उपअवधारणाओं के लिए अपनी योजनाओं में सुधार या उनका समायोजन कर सकें। उदाहरण के लिए, आप निम्न का निर्णय कर सकते हैं:

- गतिविधियों में बदलाव करना
- खुले और बंद प्रश्नों की एक श्रृंखला तैयार करना
- जिन छात्र–छात्राओं को अतिरिक्त सहायता चाहिए उनके साथ अनुवर्ती सत्र आयोजित करना।

सोचें कि आप छात्र–छात्राओं के सीखने में मदद के लिए क्या योजना बना सकते थे या अधिक बेहतर कर सकते थे।

जब आप हर अवधारणा से गुजरेंगे, आपकी सीखने संबंधी योजनाएं अपरिहार्य रूप से बदल जाएंगी, क्योंकि आप हर होने वाली चीज का पूर्वानुमान नहीं कर सकते। अच्छे नियोजन का अर्थ है कि आप जानते हैं कि आप किस तरह से सिखाना चाहते हैं और इसलिए जब आपको अपने छात्र–छात्राओं के वास्तविक अधिगम के बारे में पता चलेगा तब आप लचीले ढंग से उसके प्रति अनुक्रिया करने को तैयार रहेंगे।

संसाधन 6: गतिविधि 3 के उदाहरण

अनुकूलन अभ्यास 1.6 (NCERT की कक्षा 9 की पाठ्यपुस्तक, अध्याय 1 का पृ. 26)

अभ्यास 1.6

1. पता लगाएँ: (i) $64^{\frac{1}{2}}$ (ii) $32^{\frac{1}{5}}$ (iii) $125^{\frac{1}{3}}$
2. पता लगाएँ: (i) $9^{\frac{3}{2}}$ (ii) $32^{\frac{2}{5}}$ (iii) $16^{\frac{3}{4}}$ (iv) $125^{\frac{-1}{3}}$
3. सरल करें: (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{5}}$ (ii) $(\frac{1}{3^3})^7$ (iii) $\frac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$ (iv) $7^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$

अपने छात्र–छात्राओं को यह अतिरिक्त प्रश्न पूछकर अनुकूलन करें:

- इन प्रश्नों को हल करने की विधियों में क्या समान है और क्या अलग–अलग है?
- ऊपर दिए प्रश्न 1, 2 और 3 के लिए दो अतिरिक्त भाग बनाएँ। इन प्रश्नों में से एक आसान और एक कठिन होना चाहिए। सुनिश्चित करें कि आप स्वयं हल कर सकते हों!

अनुकूलन अभ्यास 1.2, प्रश्न 1 (NCERT की कक्षा 9 की पाठ्यपुस्तक, अध्याय 1 का पृ. 8)

अभ्यास 1.2

1. बताएँ कि ये कथन सही हैं या गलत। अपने उत्तरों का कारण बताएँ।

   (i) प्रत्येक अपरिमेय संख्या एक वास्तविक संख्या होती है।

   (ii) संख्या रेखा पर हर बिंदु $\sqrt{m}$ रूप का होता है, जहाँ m एक प्राकृतिक संख्या है।

(iii) प्रत्येक वास्तविक संख्या एक अपरिमेय संख्या होती है।

अपने छात्र–छात्राओं को यह अतिरिक्त प्रश्न पूछकर इस अभ्यास का अनुकूलन करें:

- आप कैसे जानते हैं कि आप सही हैं?
- प्रश्न 1 के लिए आपके सही उत्तरों के उल्टे उत्तर अपने साथी के साथ आजमाएँ और उन्हें विश्वास दिलाएँ।

अतिरिक्त संसाधन

- A newly developed maths portal by the Karnataka government: http://karnatakaeducation.org.in/KOER/en/index.php/Portal:Mathematics
- Class X maths study material: http://www.zietmysore.org/stud_mats/X/maths.pdf
- National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics: https://www.ncetm.org.uk/
- National STEM Centre: http://www.nationalstemcentre.org.uk/
- OpenLearn: http://www.open.edu/openlearn/
- BBC Bitesize: http://www.bbc.co.uk/bitesize/
- Khan Academy's math section: https://www.khanacademy.org/math
- NRICH: http://nrich.maths.org/frontpage
- Mathcelebration: http://www.mathcelebration.com/
- Art of Problem Solving's resources page: http://www.artofproblemsolving.com/Resources/index.php
- Teachnology: http://www.teach-nology.com/worksheets/math/
- Maths is Fun: http://www.mathsisfun.com/
- National Council of Educational Research and Training's textbooks for teaching mathematics and for teacher training of mathematics: http://www.ncert.nic.in/ncerts/textbook/textbook.htm
- LMT-01 *Learning Mathematics*, Block 1 ('Approaches to Learning') Block 2 ('Encouraging Learning in the Classroom'), Block 6 ('Thinking Mathematically'): http://www.ignou4ublog.com/2013/06/ignou-lmt-01-study-materialbooks.html
- *Learning Curve* and *At Right Angles*, periodicals about mathematics and its teaching: http://azimpremjifoundation.org/Foundation_Publications
- Central Board of Secondary Education's books and support material (also including the *Teachers Manual for Formative Assessment – Mathematics (Class IX)*) – select 'CBSE publications', then 'Books and support material': http://cbse.nic.in/welcome.htm

संदर्भ/संदर्भग्रंथ सूची

Dewey, J. (1967) *Democracy and Education*. New York, NY: The Free Press.

Dörfler, W. (1991) 'Meaning: image schemata and protocols: plenary lecture', in Furinghetti, F. (ed.), *Proceedings of PME XV, Vol. I*, pp. 95–126.

National Council of Educational Research and Training (2005) *National Curriculum Framework (NCF)*. New Delhi: NCERT.

National Council of Educational Research and Training (2009) *National Curriculum Framework for Teacher Education (NCFTE)*. New Delhi: NCERT.

Papert, S. (1980) *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*. New York, NY: Basic Books.

Watson, A., Jones, K. and Pratt, D. (2013) *Key Ideas in Teaching Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Van Hiele, P. (1986) *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. Orlando, FL: Academic Press.

अभिस्वीकृतियाँ

यह सामग्री क्रिएटिव कॉमन्स एट्रिब्यूशन–शेयरएलाइक लाइसेंस (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/) के अंतर्गत उपलब्ध कराई गई है, जब तक कि अन्यथा निर्धारित न किया गया हो। यह लाइसेंस TESS-India, OU और UKAID लोगो के उपयोग को वर्जित करता है, जिनका उपयोग केवल TESS-India परियोजना के भीतर अपरिवर्तित रूप से किया जा सकता है।

कॉपीराइट के स्वामियों से संपर्क करने का हर प्रयास किया गया है। यदि किसी को अनजाने में अनदेखा कर दिया गया है, तो पहला अवसर मिलते ही प्रकाशकों को आवश्यक व्यवस्थाएं करने में हर्ष होगा।

वीडियो (वीडियो स्टिल्स सहित): भारत भर के उन शिक्षक प्रशिक्षकों, प्रधानाध्यापकों, शिक्षकों और छात्र–छात्राओं के प्रति आभार प्रकट किया जाता है जिन्होंने उत्पादनों में दि ओपन यूनिवर्सिटी के साथ काम किया है।