

गणित में रचनात्मक सोच विकसित करना: त्रिकोणमिति



भारत में विद्यालय आधारित  
समर्थन के माध्यम से शिक्षक  
शिक्षा

[www.TESS-India.edu.in](http://www.TESS-India.edu.in)



<http://creativecommons.org/licenses/>



## संदेश



शिक्षकों को बाल केंद्रित कक्षा अभ्यास की ओर उन्मुख करने तथा शिक्षक प्रशिक्षण की गुणवत्ता को बेहतर बनाने के उद्देश्यों को सम्मुख रखते हुए TESS-India राष्ट्रीय स्तर पर कार्यरत है। इस दिशा में TESS-India द्वारा मुक्त शैक्षिक संसाधन (Open Educational Resources) का विकास किया गया है। ये संसाधन शिक्षकों तथा शिक्षक-प्रशिक्षकों के वृत्ति विकास (Professional development) में लाभकारी एवं उपयोगी सिद्ध होंगे। राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद, बिहार के नेतृत्व में इन संसाधनों का स्थानीयकृत किया गया है, जिसके अन्तर्गत इनके उद्देश्य के मूल को बरकरार रखते हुए इनमें स्थानीय, भाषा, बोली, प्रथाओं, संस्कृतियों तथा नियमों को सम्मिलित किया गया है। इनका उपयोग शिक्षण कार्य में सहजता एवं सुगमता पूर्वक किया जा सकता है।

राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद, बिहार के मार्गदर्शन में TESS-India द्वारा स्थानीय भाषा में तैयार मुक्त शैक्षिक संसाधन (Open Educational Resources) नेट पर आप सभी के लिए सुलभ उपलब्ध है।

शुभकामनाओं सहित।

(डॉ० मुरली मनोहर सिंह)

निदेशक

एस०सी०ई०आर०टी०, बिहार

| समीक्षा एवं दिशाबोध  |
|--|
| डॉ. मुरली मनोहर सिंह, निदेशक राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार                              |
| डॉ. सेयद अब्दुल मोईन, विभागाध्यक्ष, अध्यापक शिक्षा विभाग, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार |
| डॉ. कासिम खुशीद, विभागाध्यक्ष, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्                                   |
| डॉ. इम्तियाज आलम, विभागाध्यक्ष, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार                           |
| डॉ. स्नेहाशीष दास राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार   |
| डॉ. अर्चना, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार   |
| डॉ. रीता राय, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार   |
| श्री तेज नारायण प्रसाद, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार                                   |

| स्थानीयकरण   |
|--|
| <b>भाषा और शिक्षा</b>  |
| डॉ. ज्ञानदेव मणि त्रिपाठी, प्राचार्य, मैत्रेय कॉलेज ऑफ एडुकेशन एण्ड मैनेजमेंट, हाजीपुर, वैशाली |
| श्री सुमन सिंह, प्रखंड साधनसेवी, भगवानपुर हाट, सिवान   |
| श्री कात्यायान कुमार त्रिपाठी, प्राथमिक विद्यालय चैलीटाल, पटना                                 |
| श्री कृत प्रसाद, प्रखंड साधनसेवी, हिलसा, नालंदा  |
| <b>प्राथमिक अंग्रेजी</b>   |
| श्री अरशद रजा, सहायक शिक्षक, प्राथमिक विद्यालय, पचासा रहुई, नालंदा                             |
| श्री संतोष सुमन, सहायक शिक्षक, बालिका उच्च विद्यालय, महुआबाग                                   |
| श्री शशि भूषण पाण्डेय, सहायक शिक्षक, उत्कर्मित मध्य विद्यालय, मुकुन्दपुर, नालंदा               |
| श्रीमती रचना त्रिवेदी, शिक्षिका, नोट्रेडेम अकादमी, पटना  |
| <b>माध्यमिक अंग्रेजी</b>   |
| श्री मणिशंकर, प्रधानाध्यापक, तारामणी भगवानसाव उच्च माध्यमिक विद्यालय, कोइलवर, भोजपुर           |
| डॉ. ब्रजेश कुमार, शिक्षक, पी. एन. एंग्लो संस्कृत माध्यमिक विद्यालय, नया टोला, पटना             |
| <b>प्राथमिक गणित</b>   |
| श्री कृष्ण कान्त ठाकुर   |
| श्री दिलीप कुमार, संकुल संसाधन केन्द्र समन्वयक, बुलनी हैदरपुर, नालंदा                          |
| श्री गोविन्द प्रसाद, प्रखंड साधनसेवी, चनपटिया, पश्चिमी चम्पारण                                 |
| <b>माध्यमिक गणित</b>   |
| डॉ. राकेश कुमार, भागलपुर डायट  |
| श्री रिजवान रिजवी, उत्कर्मित मध्य विद्यालय, सिलौटा चाँद, कैमूर                                 |
| श्री इन्द्रभूषण कुमार, शिक्षक, सहयोगी माध्यमिक विद्यालय, हाजीपुर, वैशाली                       |
| <b>प्राथमिक विज्ञान</b>  |
| श्री मनोज त्रिपाठी, प्रखंड साधनसेवी, बरहारा, भोजपुर  |
| श्री शशिकान्त शर्मा, प्रखंड साधनसेवी, आरा, भोजपुर  |
| श्री रणबीर सिंह, संकुल संसाधन केन्द्र समन्वयक, आदर्श आवासीय मध्य विद्यालय शिक्षक संघ, सहरसा    |
| <b>माध्यमिक विज्ञान</b>  |
| श्री जी.वी.एस.आर प्रसाद  |
| श्री मुकुल कुमार, शिक्षक, सहायक शिक्षक, गोरखनाथ सूर्यदेव माध्यमिक विद्यालय, राजापाकर वैशाली    |


**TESS-India (Teacher Education Through School Based Support)** का लक्ष्य है भारत में मुक्त शैक्षिक संसाधनों के द्वारा प्राथमिक और माध्यमिक स्तरों पर शिक्षकों के कक्षा अभ्यासों को बेहतर करना। ये संसाधन शिक्षकों के छात्र-केन्द्रित, भागीदारी दृष्टिकोण को विकसित करने में सहायता करेंगे।

**TESS-India** के मुक्त शैक्षिक संसाधन (**Open Education Resources – OERs**) शिक्षकों को स्कूल की पाठ्यपुस्तक के लिए सहायक पुस्तिका प्रदान करते हैं। ये संसाधन शिक्षकों के लिए गतिविधियाँ प्रदान करते हैं जो वे कक्षा में अपने छात्रों के साथ कर सकते हैं। साथ ही इनमें केस स्टडी भी हैं जो ये दर्शाते हैं कि किस प्रकार दूसरे शिक्षकों ने उस विषय को सिखाया है। संबंधित संसाधन शिक्षकों को पाठ योजना बनाने में और विषय पर ज्ञान वर्धन करने में उनकी सहायता करते हैं।

**TESS-India** के मुक्त शैक्षिक संसाधन भारतीय पाठ्यक्रम और संदर्भों के अनुकूल हैं। ये भारतीय तथा अंतर्राष्ट्रीय लेखकों के सहयोग से तैयार किये गये हैं और ये ऑनलाइन तथा प्रिंट उपयोग के लिए उपलब्ध है (<http://www.tess-india.edu.in>)। मुक्त शैक्षिक संसाधन अनेकों संस्करणों में उपलब्ध हैं जो प्रत्येक राज्य के लिए उपयुक्त है जहाँ TESS India कार्यरत है। उपयोगकर्ता इन संसाधनों को अनुकूल और स्थानीयकृत करने के लिए स्वतंत्र हैं ताकि ये स्थानीय आवश्यकताओं और संदर्भों को पूरा कर सकें।

**TESS-India** मुक्त विश्वविद्यालय, ब्रिटेन के नेतृत्व में तथा ब्रिटेन की सरकार द्वारा वित्त-पोषित है।

### **वीडियो संसाधन**

इस इकाई की कुछ गतिविधियों के साथ निम्न प्रतीक का उपयोग किया गया है: । इससे संकेत मिलता है कि निर्दिष्ट अध्यापन संबंधी थीम के लिए **TESS-India** वीडियो संसाधनों को देखना आपके लिए उपयोगी होगा।

**TESS-India** वीडियो संसाधन भारत में अनेक प्रकार की कक्षाओं के संदर्भ में मुख्य अध्यापन तकनीकों का वर्णन करते हैं। हमें आशा है कि वे आपको इसी प्रकार के अभ्यासों के साथ प्रयोग करने के लिए प्रेरित करेंगे। उनका उद्देश्य पाठ (टेक्स्ट) पर आधारित इकाइयों के माध्यम से काम करने के आपके अनुभव का पूरक होना और उसे बढ़ाना है।

**TESS-India** वीडियो संसाधनों को ऑनलाइन देखा या **TESS-India** की वेबसाइट, <http://www.tess-india.edu.in/> से डाउनलोड किया जा सकता है। वैकल्पिक रूप से, आप ये वीडियो सीडी या मेमोरी कार्ड के माध्यम से भी देख सकते हैं।

संस्करण 2.0 SM12v1

**Bihar**

तृतीय पक्षों की सामग्रियों और अन्यथा कथित को छोड़कर, यह सामग्री क्रिएटिव कॉमन्स एट्रिब्यूशन-शेयरएलाइक लाइसेंस के अंतर्गत उपलब्ध कराई गई है: <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>

**TESS-India is led by The Open University UK and funded by UK aid from the UK government**

## यह इकाई किस बारे में है

त्रिकोणमिति भारतीय राष्ट्रीय पाठ्यचर्या फ्रेमवर्क (2005) में एक महत्वपूर्ण भूमिका अदा करती है। यह आकृति और स्थान की अवधारणाओं को अनुपात, निगमन और गणितीय प्रमाण जैसे अन्य गणितीय विचारों से जोड़ती है। यह वास्तविक जीवन में देखी जाने वाली चीजों को गणितीय कक्षा की दुनिया के साथ जोड़ने का अवसर भी देती है।

दुर्भाग्यवश, कई छात्र त्रिकोणमिति द्वारा दी जाने वाली समृद्धता, संबद्धता या संरचनात्मकता को अनुभव नहीं करते। इसके बजाय वे अक्सर समस्याओं का समाधान निकालने वाली विधियों के साथ इसे एक अन्य याद रखने वाला अभ्यास मानते हैं, जहाँ नियम और सूत्रों को 'कंठस्थ' करके सीखना होता है।

इस इकाई का लक्ष्य छात्र-छात्राओं की मानसिक चिंतन शक्ति का उपयोग करके त्रिकोणमिति पर मनोरंजक और रचनात्मक तरीके से कार्य करके इन समस्याओं का समाधान करने में आपकी मदद करना है। इकाई में बताया गया है कि यदि आप कार्यों में छोटे-छोटे बदलाव करते हैं, तो छात्र और अधिक प्रभावी ढंग से सीख पाएँगे। जब छात्र-छात्राओं को अधिक चयन करने और निर्णय लेने की छूट दी जाती है, तो वे त्रिकोणमिति का आनंद ले सकते हैं और अपने गणितीय अधिगम से सशक्त अनुभव कर सकते हैं।



### ज़रा सोचिए

- अपने वर्गकक्ष के बारे में सोचें। त्रिकोणमिति सीखने के बारे में आपके छात्र-छात्राएँ क्या सोचते हैं? उन्हें इसमें कितना आनंद आता है? आपको ऐसा क्यों लगता है?
- उस समय के बारे में सोचें, जब आप विद्यालय में त्रिकोणमिति सीखते थे। जिस तरह से आपको विद्यालय में पढ़ाया गया था, उसके तरीके में आपको क्या भिन्न पसंद आएगा (यदि कुछ हो)?

### आप इस इकाई में सीख सकते हैं

- त्रिकोणमिति के उपयोग का समर्थन करने वाली गणितीय शब्दावली के उपयोग को किस प्रकार बढ़ावा दें।
- रचनात्मक और दिलचस्प गतिविधियों के माध्यम से त्रिकोणमिति की अवधारणाओं और अनुप्रयोगों को कैसे सिखाएँ/पढ़ाएँ
- स्मृति पर कम निर्भर समस्या सुलझाने वाली पद्धतियों को विकसित करने में आपके छात्र-छात्राओं की मदद के लिए कुछ विचार।

इस इकाई का संबंध संसाधन 1 में दर्शाई गई NCF (2005) और NCFTE (2009) शिक्षण आवश्यकताओं से है।

### 1 गणित सीखने में रचनात्मकता

सीखने में रचनात्मकता पिछले कुछ वर्षों में अत्यधिक चलन में आयी है। रचनात्मकता का तात्पर्य कुछ हद तक छात्र-छात्राओं को सीखने (अधिगम) में आनंद देने और उन्हें स्वयं सोचने देने से संबंधित है। छात्र-छात्राओं को भविष्य के कार्यों के लिए तैयार करना भी महत्वपूर्ण है। भविष्य में कामों को यांत्रिक रूप से किया जाना कम से कम होगा (क्योंकि यह कंप्यूटर से किया जा सकता है) और समस्या समाधान, अनूठे तरीके से सोचने और रचनात्मक समाधान देने पर अधिक केंद्रित होगा।

यह देखना हमेशा आसान नहीं होता कि विद्यालय के गणित और पाठ्यपुस्तक अभ्यास को रचनात्मक सीखने-सिखाने के तरीकों में कैसे बदला जा सकता है। इस इकाई का उद्देश्य इस दिशा में कुछ विचार प्रस्तुत करना है। यह 'क्या यदि?' परिदृश्यों का उपयोग करके 'संभावित चिंतन' (एरिस्टेडोऊ, 2011) के रूप में रचनात्मकता के नजरिए पर आधारित है।

शोध से अध्यापन और अधिगम की सुविधाओं की एक सूची तैयार की गई है, जो कि वर्गकक्ष में संभावना चिंतन में शामिल होती हैं (ग्रेंगर और अन्य, 2007, क्राफ्ट और अन्य 2012)। इसमें प्रश्न पूछना, विचारों के साथ प्रयोग करना, जोखिम लेना, कलाबाजी करना और सहयोग से कार्य करना शामिल है।

इस इकाई के कार्यों में इन विशेषताओं पर कार्य किया जाता है।



## जरा सोचिए

- उस समय के बारे में सोचें जब आप अपने चिंतन में रचनात्मक थे। यह केवल गणित के बारे में ही नहीं है – उदाहरण के लिए यह खाना बनाने, हस्तशिल्प बनाने, घर पर किसी जटिल समस्या का समाधान करने या किसी चीज़ के बारे में सोचने से संबंधित भी हो सकता है। क्या हुआ? उदाहरण के लिए, क्या उसमें कोई प्रश्नोत्तरी, प्रयोग, मनोरंजन, जोखिम लेना या सहयोग शामिल था?

## 2 पसंद की भूमिका

रचनात्मकता में सहायता के लिए खेल-कूद को महत्वपूर्ण माना जाता है, क्योंकि खेल में आप सहज रूप से कई संभावित समाधान खोज लेते हैं। इसे अपसारी चिंतन के रूप में जाना जाता है। शब्द 'आनंद' को अक्सर युवा बच्चों से संबद्ध माना जाता है, लेकिन इसे उन्नतक सीमित नहीं होना चाहिए। खेल का संबंध खोजने और प्रयोग करने से है, जो किसी भी उम्र का व्यक्ति कर सकता है। बच्चों को खेलते हुए देखने से ही उनकी रचनात्मकता की याद दिला सकता है।

जब वे खोजते और प्रयोग करते हैं, तो यह महत्वपूर्ण है कि छात्र-छात्राओं के पास विकल्प हों: किसी समस्या को विभिन्न तरीकों से देखने के विकल्प, गलतियाँ करने के विकल्प या अपने स्वयं के अनुमानों के साथ आने और यह जाँचने के विकल्प कि वे मान्य हैं या नहीं। गतिविधि 1 में, आप छात्र-छात्राओं को सीधे-सीधे यह पूछकर विकल्प देते हैं कि 'आप कितने तरह से...?'

गतिविधि का लक्ष्य छात्र-छात्राओं को यह जानकारी देना और उनमें आत्मविश्वास पैदा करना है कि बंद बहुभुजों को दो समकोण त्रिभुजों में बाँटा जा सकता है। इससे वे बाद में त्रिकोणमिति समस्याओं में उपयोग के लिए समकोण त्रिभुज खोजते समय, जैसे कोज्या नियम को सिद्ध करते समय, 'बस कर देने' में सक्षम बन पाएँगे। इस तरह से, बहुभुज में समकोण त्रिभुजों के साथ खेलने में सक्षम होने पर वे बाद में 'समस्या सुलझाने' का औजार प्राप्त कर लेंगे।

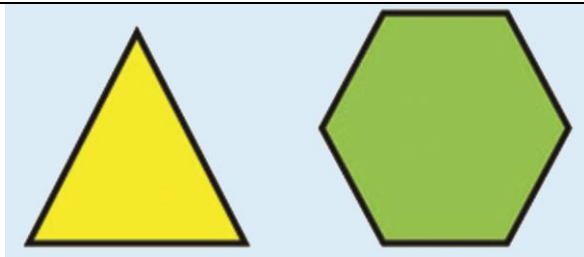
यह कार्य उन छात्र-छात्राओं के साथ बेहतर काम करता है, जो पहले स्वयं संभावनाएँ खोजते हैं, और फिर अपने सहपाठियों के साथ या समूह में और विचार पाने और अपने चिंतन को परिष्कृत करने के लिए चर्चा करते हैं।

इस इकाई में अपने छात्र-छात्राओं के साथ गतिविधियों के उपयोग का प्रयास करने के पहले अच्छा होगा कि आप सभी गतिविधियों को पूरी तरह (या आंशिक रूप से) स्वयं करके देखें। यह और भी बेहतर होगा यदि आप इसका प्रयास अपने किसी सहयोगी के साथ करें, क्योंकि जब आप अनुभव पर विचार करेंगे तो आपको मदद मिलेगी। स्वयं प्रयास करने से आपको शिक्षार्थी के अनुभवों के भीतर झाँकने का मौका मिलेगा, जो परोक्ष रूप से आपके सीखने-सिखाने की प्रक्रिया और एक शिक्षक के रूप में आपके अनुभवों को प्रभावित करेगा। जब आप तैयार हों, तो अपने छात्र-छात्राओं के साथ गतिविधियों का उपयोग करें। पाठ के बाद, सोचें कि गतिविधि किस तरह हुई और उससे क्या सीख मिली। इससे आपको अधिक छात्र को केंद्र में रखने वाला शैक्षिक वातावरण बनाने में मदद मिलेगी।

### गतिविधि 1: छात्र बहुभुज में त्रिभुजों की खोज करते हैं

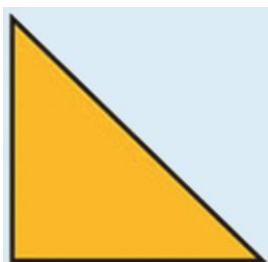
अपने छात्र-छात्राओं से निम्नलिखित पूछें:

- आप चित्र 1 में दी गई हर आकृति को कितनी तरह से समकोण त्रिभुजों में बाँट सकते हैं?



चित्र 1: एक समबाहु त्रिभुज और षट्कोण।

- एक समकोण त्रिभुज बनाएँ (चित्र 2)। इस त्रिभुज को आधार मानकर आप किस प्रकार के बंद बहुभुज बना सकते हैं?



चित्र 2 समकोण त्रिभुज।

चित्र 3 एक उदाहरण दिखाता है।



चित्र 3: एक वर्ग आठ समकोण त्रिभुजों से बनता है।

- क्या आपको लगा कि इस वर्ग के अन्दर आठ से अधिक समकोण त्रिभुज बनाये जा सकते हैं?
- क्या आप सोचते हैं कि सभी बंद बहुभुजों का निर्माण समकोण त्रिभुजों से किया जा सकता है? अपने उत्तर को उचित ठहराने के लिए कारण बताएँ।
- आप ऐसा क्यों सोचते हैं कि इस गतिविधि में आपको यह पता लगाने के लिए कहा जाता है कि क्या कोई भी बंद बहुभुज समकोण त्रिभुजों से बनाया जा सकता है?



गतिविधि 1 से 3 तक का उपयोग कक्षा X के NCERT book के पाठ 10: त्रिकोणमिती का परिचय (पृष्ठ 191) में पहले किया जा सकता है।



## वीडियो: सभी को शामिल करना

आप मुख्य संसाधन 'सभी को शामिल करना' पर भी एक नजर डालना चाह सकते हैं।

### केस स्टडी 1: श्रीमती उषा मरांडी गतिविधि 1 के उपयोग के बारे में बताती हैं

*यह एक शिक्षिका की कहानी है, जिसने अपने माध्यमिक कक्षा के छात्र-छात्राओं के साथ गतिविधि 1 का प्रयास किया।*

यह गतिविधि करने के दौरान जिस बात ने मुझे प्रभावित किया, वह छात्र-छात्राओं का उत्साह था। मैंने इसकी अपेक्षा नहीं की थी। हमने कार्य का पहला प्रश्न साथ में पढ़ा और फिर मैंने छात्र-छात्राओं से कुछ समय साथ में कार्य करने को कहा, क्योंकि मैं उन्हें स्वयं सोचने का अवसर देना चाहती थी। जब वे तैयार हों, तब वे अपने विचारों की चर्चा अपने सहपाठियों से कर सकते थे।

सभी लोग दी गई आकृति को समकोण त्रिभुजों में बाँटने में वास्तव में व्यस्त हो गए। कुछ लोगों ने आकृति को ऐसे त्रिभुजों में बाँटना शुरू कर दिया जो समकोण त्रिभुज नहीं थे; मैंने तुरंत उन्हें टोकना उचित नहीं समझा, जैसा कि मैं सामान्य तौर पर करती हूँ। इसके बजाय मैंने उन्हें गलतियाँ करने दी! मैंने देखा कि अधिकांश छात्र-छात्राओं ने इसे खुद ही ठीक कर लिया: उन्होंने दूसरों के काम पर नजर डाली, प्रश्न को फिर से पढ़ा और काम का तरीका बदल लिया। उन्होंने अपना उत्साह नहीं खोया और नए उत्साह से काम करते रहे।

जब कुछ लोगों ने अपने विचारों की चर्चा करना शुरू किया, तो मैंने वर्गकक्ष को रोका और पूछा, 'आप ऐसा क्यों सोचते हैं कि समकोण त्रिभुजों के साथ काम करना महत्वपूर्ण है?' मैंने उन कई छात्र-छात्राओं से अपने अनुभव और सोच के बारे में बात करने को कहा, जिन्होंने इसे 'गलत' किया था। इस तरह से, वर्गकक्ष में सभी लोगों ने सीखा कि गलतियाँ करना वास्तव में सीखने का एक बहुत अच्छा अवसर होता है।

उन्हें समकोण त्रिभुजों से बंद बहुभुज बनाना और भी रोमांचक लगा, क्योंकि उन्हें अपनी आकृतियाँ बनाने की स्वतंत्रता थी। फिर से, कुछ छात्र-छात्राओं ने खुले बहुभुज बनाते हुए समाप्त किया, लेकिन उन्होंने अपनी गलती सुधार ली। गौरव ने समकोण त्रिभुजों के कट-आउट बनाए और विभिन्न आकृतियाँ जोड़ने के लिए इनका उपयोग किया। कुछ ज्ञात ज्यामितीय आकृतियाँ थी, जैसे षट्कोण; अन्य अधिक यादृच्छिक स्वरूप थे और कुछ तो कई बंद बहुभुजों से बनी मूर्तियाँ थीं। छात्र एक-दूसरे के काम में रुचि ले रहे थे और अपने साथियों के काम से प्रेरणा ले रहे थे, और वही तरीके अपना रहे थे। दूसरे लोगों ने बनाने के लिए सीधे कोनों और पेंसिल का उपयोग किया।



## वीडियो: अनुश्रवण करना और फीडबैक देना

अधिक जानकारी के लिए संसाधन 2 'अनुश्रवण करना और प्रतिक्रिया देना' देखें।

### अपने सीखने-सिखाने की प्रक्रिया को परिलक्षित करना (दर्शाना)

जब आप अपनी वर्गकक्ष के साथ ऐसी कोई गतिविधि करें, तो बाद में सोचे कि क्या ठीक रहा और कहाँ गड़बड़ हुई। ऐसे सवाल की ओर ध्यान दें जिसमें छात्र-छात्राओं की रुचि दिखाई दे और वे आगे बढ़ते हुए नजर आएँ और वे जिनका स्पष्टीकरण करने की आवश्यकता हो। ऐसी बातें ऐसी 'स्क्रिप्ट' पता करने में सहायक होती हैं, जिससे आप छात्र-छात्राओं में गणित के प्रति रुचि जगा सकें और उसे मनोरंजक बना सकें। यदि वे कुछ भी समझ नहीं पाते हैं तथा कुछ भी नहीं कर पाते



हैं, तो वे शामिल होने में कम रुचि लेंगे। जब भी आप गतिविधियां करें, इस विचार करने वाले अभ्यास का उपयोग करें, इस बात पर ध्यान देते हुए, जैसे श्रीमती नागाराजू ने किया, क्योंकि कुछ छोटी-छोटी चीजों से काफी फर्क पड़ा।



### ज़रा सोचिए

ऐसे चिंतन को गति देने वाले अच्छे सवाल हैं:

- आपका वर्गकक्ष कैसा रहा?
- छात्र-छात्राओं से किस प्रकार की प्रतिक्रिया अनपेक्षित थी? क्यों?
- अपने छात्र-छात्राओं की समझ का पता लगाने के लिए आपने क्या सवाल किए?
- क्या आपको लगा कि आपको किसी समय हस्तक्षेप करना होगा?

### 3 'क्या होगा यदि...?' प्रश्न का उपयोग करना

गतिविधि 1 में 'कितनी तरह से...' प्रश्न का उपयोग किया गया है ताकि छात्र-छात्रा खेलने, खोजने और अन्वेषण करने के लिए प्रेरित हों कि समकोण त्रिभुजों से कितने बंद बहुभुज बनाए जा सकते हैं। करने के तरीकों के विकल्प होने और गलतियाँ करने से आपके छात्र-छात्राओं में काम से जुड़ने की उत्सुकता पैदा होती है।

आनंदपूर्णता स्थितियों में बदलाव के बारे में सोचना शामिल करता है। इसे कभी-कभी 'क्या होगा यदि?' सोच भी कहा जाता है। गणित में चरों के बारे में सोचते समय यह बेहतर कार्य करता है: 'यदि मैं इस चर को बदल दूँ तो अन्य चरों का क्या होगा?' संभावनाओं के बारे में सोचने की इस प्रक्रिया में, चरों और स्थिरांकों की भूमिका और उनके बीच के संबंध का पता भी लगाया जाता है।

गतिविधि 2 में छात्र-छात्राओं से यह पूछने के बारे में सोचने को कहा जाता है कि 'क्या होगा यदि मैं...को बदल दूँ?' स्वयं के अनुमानों के साथ आने और कार्य करने के लिए स्वयं के उदाहरणों का उपयोग करने से उनमें स्वामित्व का बोध आ सकता है और वे अपनी चिंतन शक्तियों के लिए सम्मानित महसूस कर सकते हैं। गतिविधि के अंत में, इन विभिन्न उदाहरणों पर आधारित जानकारी का मिलान करने से सामान्यीकरण निकालना भी संभव हो पाएगा।

यह गतिविधि छात्र-छात्राओं से अपने विचारों का परीक्षण करने से पहले यह सोचने को भी कहती है कि क्या होने जा रहा है। इससे उन्हें यह विचार करने में मदद मिलनी चाहिए कि कौन सा चिंतन आवश्यक है (इसे 'मेटा कॉग्निशन' कहा जाता है)। जब उन्हें अपना चिंतन सही लगता है, तो इससे उन्हें अच्छा लगेगा, क्योंकि उन्होंने इसे 'सही' पहचाना। जब उनके अनुमान गलत निकलते हैं, तो इससे भी उन्हें आश्चर्य हो सकता है और उन्हें इस बारे में कौतूहल होगा कि 'ऐसा क्यों है...?'

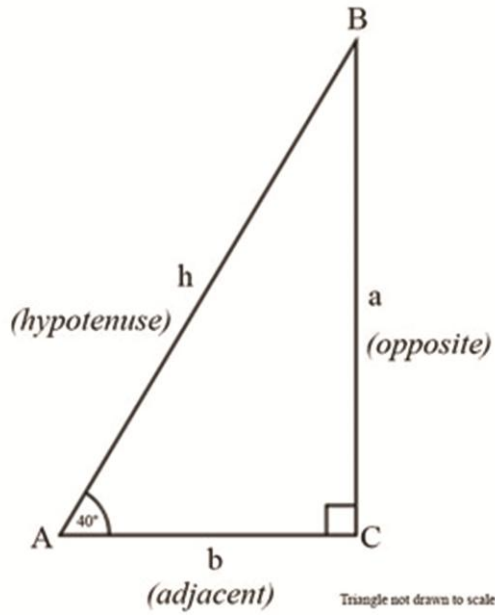
#### गतिविधि 2: छात्र-छात्रा 'क्या होगा यदि...?' पूछते हुए खोजबीन करते हैं

इस गतिविधि में आपके छात्र-छात्राओं के लिए यह खोजबीन करना आवश्यक होगा कि क्या होगा यदि वे त्रिभुज की एक भुजा या कोण बदल देते हैं, और उन्हें इस बात पर विचार करना होगा कि इस बदलाव से अन्य कोणों और भुजाओं पर क्या प्रभाव होगा।

#### भाग 1

अपने छात्र-छात्राओं को निम्न बताएँ:

- एक समकोण त्रिभुज बनाएँ और चित्र 4 में बताए अनुसार इसे लेबल करें।



चित्र 4 समकोण त्रिभुज का एक उदाहरण।

- तालिका 1 में, प्रत्येक पंक्ति आपके द्वारा बनाए गए त्रिभुज में किसी भुजा या कोण में रूपांतरण दिखाती है। रूपांतरण के फलस्वरूप त्रिभुज के अन्य भाग किस तरह बढ़ते या घटते हैं, इसके अनुसार खाली कक्षों को भरना होगा।
- पहले तालिका की प्रतिलिपि बनाएँ और लिखें कि आपके अनुसार क्या परिवर्तन होगा; फिर बदलावों को बनाकर देखें। यदि कोई बदलाव नहीं होता, तो 'कोई बदलाव नहीं' लिखें।

तालिका 1 किसी समकोण त्रिभुज में रूपांतरण।

| कोण A         | कोण B    | कोण C         | AB            | BC  | AC       |
|---------------|----------|---------------|---------------|-----|----------|
| बढ़ता है      |          | स्थिर रहता है |               |     |          |
| घटता है       |          | स्थिर रहता है |               |     |          |
|               | बढ़ता है | स्थिर रहता है |               |     |          |
|               | घटता है  | स्थिर रहता है |               |     |          |
|               |          | स्थिर रहता है | दुगुना        |     |          |
|               |          | स्थिर रहता है |               | आधा |          |
|               |          | स्थिर रहता है |               |     | बढ़ता है |
|               |          | स्थिर रहता है | स्थिर रहता है |     |          |
| स्थिर रहता है |          | स्थिर रहता है |               |     |          |

- आपने क्या देखा? आपको ऐसा क्यों लगता है?

## भाग 2

- तालिका 2 की हर पंक्ति में, आपको कोण C का आकार और AB (कर्ण) और AC भुजाओं की लम्बाई दी गयी है।
- ये त्रिभुज बनाएँ और अन्य गुण भागों के मान निर्धारित करें।
- फिर से, तालिका की प्रतिलिपि बनाएँ और बनाए गए त्रिभुजों को जाँचने से पहले लिखें कि आपके अनुसार क्या परिवर्तन होगा; फिर बदलावों को बनाकर देखें।

तालिका 2 समकोण त्रिभुज में कोणों की गणना करना।

| कोण A | कोण B | कोण C | कर्ण (AB) | a (BC) | AC     |
|-------|-------|-------|-----------|--------|--------|
|       |       | 90°   | 2 इकाई    |        | 1 इकाई |
|       |       | 90°   | 4 इकाई    |        | 2 इकाई |
|       |       | 90°   | 6 इकाई    |        | 3 इकाई |
|       |       | 90°   | 8 इकाई    |        | 4 इकाई |

- आपने क्या देखा? आपको ऐसा क्यों लगता है?

## केस स्टडी 2: गतिविधि 2 के उपयोग का अनुभव श्रीमती सुनीता बताती हैं

मैंने छात्र-छात्राओं को यह कहते हुए गतिविधि के भाग 1 का परिचय कराया कि वे अब 'क्या होगा यदि...?' समस्या करने जा रहे हैं, जिसमें उन्हें जासूस बनना होगा और संभावनाओं के बारे में सोचना होगा। सबसे पहले उन्हें अपनी स्वयं की मापों से एक समकोण त्रिभुज बनाना था। ऐसा करवाने के बाद, मैंने उन्हें तालिका 1 उतारने को कहा जो मैंने श्यामपट्ट पर लिखी थी।

पहले तो वे अपने स्वयं के त्रिभुज मापों का उपयोग करने लगे, फिर मुझे उन्हें याद दिलाना पड़ा कि वे बढ़ाने और घटाने को देख रहे थे। इससे उन्हें शुरू करने में सहायता मिली। मैंने देखा कि उनमें से कई इधर-उधर नजरें दौड़ाने के साथ अपने हाथ भी दौड़ा रहे थे। जब नितीन ने अपने हाथ फैलाए तो मैंने उससे पूछा कि क्या कर रहे हो, तो उसने कहा कि 'मैं अपने मन की आँखों में कोण को बढ़ा रहा हूँ, ताकि देख पाऊँ कि दूसरी भुजाओं पर क्या प्रभाव होगा?' मैंने उससे कहा कि यह तो रोचक है और इसे जारी रखें। यह सोचने की बारी आने पर कि भुजाओं को दोहरा या आधा करने पर अन्य कोणों पर क्या प्रभाव पड़ता है, कुछ छात्र-छात्राओं को नया त्रिभुज, भले ही कच्चा हो, बनाने की आवश्यकता पड़ी ताकि वे इस बारे में आश्वस्त हो सकें। जब किसी समकोण त्रिभुज को इस तरह से बदला जाता है, तो क्या होता है, यह देखने के लिए मैंने उन्हें 'कल्पना' करने के लिए प्रेरित किया, पेंसिल का उपयोग करके या आरेखित करके, जो भी वे चाहें।

जब तालिका भर गई, तो छात्र-छात्राओं को ध्यान दी गई बातों के बारे में सोचना था। मैंने पहले उन्हें उनकी तालिका को देखने और 30 सेकंड तक सोचने को कहा; फिर मैंने उन्हें उनके साथी को यह बताने को कहा कि उन्होंने तालिका में क्या देखा और देखी गई कुछ बातों पर सहमत होने को कहा। फिर मैंने छात्र-छात्राओं से देखी गई बात को दूसरी जोड़ी को बताने को कहा और चार के समूह में किसी विचार पर सहमति बनाने को कहा। हर समूह ने शेष समूह को बताया कि उन्होंने क्या देखा और एक जीवंत चर्चा शुरू हुई। मैंने महसूस किया कि इससे कम समय में सभी लोगों के विचारों पर चर्चा हुई और

उन्हें शामिल किया गया।

फिर हम भाग 2 पर आगे बढ़ें। इस बार मैंने उन्हें कोई आरेख बनाए बिना, मन में भी नहीं, यह सोचकर तालिका में लिखने को कहा कि क्या होगा। यह करने के लिए उन्हें दो-तीन मिनट देने के बाद, मैंने उन्हें जोड़ियों में आरेखण करने को कहा ताकि वे जाँच सकें कि उन्होंने जो सोचा वह सही था या नहीं। आरेखण को एकदम सही बनाना हमेशा कठिन होता है, इसलिए मैंने उन्हें याद दिलाया कि आरेखण यह सुनिश्चित करने के लिए किया जा रहा है, ताकि वे जाँच सकें कि सिद्धांततः जो उन्होंने सोचा है, वास्तव में भी वैसा ही है। यदि उन्होंने कोई कोण मापा और वह कुछ अंश बाहर निकला, तो मैंने उन्हें यह सोचने को कहा कि क्या वह उनका 'सिद्धांत' था जो 'गलत' लगा, या उनका 'व्यवहार' था। वे तुरंत समझ गए कि मैं क्या कह रही थी और वे अपने स्वयं के 'सिद्धांत' के लिए तर्क कर पा रहे थे। मैंने कई छात्र-छात्राओं को काम करते समय यह कहते सुना कि 'मैंने देखा...' इसलिए वे इसके बाद होने वाली कक्षा चर्चा के लिए तैयार थे।



### ज़रा सोचिए

अनुभाग 1 की संभावना सोच की कुछ विशेषताओं के बारे में फिर से सोचें और विचार करें कि क्या आपके छात्र-छात्राओं ने:

- स्वयं से और दूसरों से प्रश्न पूछें
- कल्पनाशीलता दिखाई और कुछ अलग (बॉक्स से बाहर) सोचा
- समाधान ढूँढते समय आनंदपूर्णता दिखाई
- कुछ गलत कर देने का जोखिम उठाया
- अपने साथियों के साथ सहभागितापूर्ण कार्य किया।

आपके किन छात्र-छात्राओं ने इन कौशलों का प्रदर्शन किया? क्या आप उदाहरण दे सकते हैं?

## 4 कार्य के परे सोचना



चित्र 5: शेरशाह का रौजा, सासाराम बिहार।

विद्यालय में गणित सीखने से छात्र-छात्रा बस प्रक्रियाओं का पालन करेंगे और इस बारे में नहीं सोचेंगे कि विधि का कोई निश्चित एल्गोरिथम क्यों उपयोग किया गया है, यह क्यों कार्य करती है, या इससे क्यों प्रश्नों का उत्तर मिला।

अगली गतिविधि किसी पेड़, किसी ऊँची वस्तु या किसी ऐसे स्थानीय लैंडमार्क की ऊँचाई निकालना है, जिसे नियमों या रस्सी या किसी अन्य चीज़ से मापना कठिन हो। आप छात्र-छात्राओं को क्लिनोमीटर का उपयोग करने को कह सकते हैं, जो भूमि सर्वेक्षकों द्वारा ऊँचाई निकालने का उपकरण है। इसका उपयोग करने का मैन्युअल देने के बजाय छात्र-छात्राओं को ऐसा

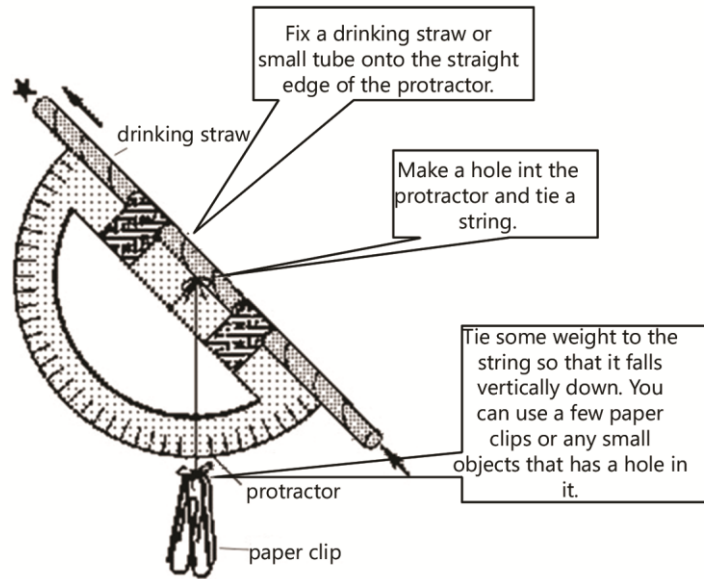
मैनुअल बनाने को कहा जाता है, इसलिए पहले उन्हें यह पता लगाना पड़ेगा कि क्लिनोमीटर एक उपयुक्त उपकरण क्यों और कैसे है – और क्लिनोमीटर को उपयोग करने का गणित क्या है। उन्हें यह निर्णय करना होगा कि मैनुअल को आगे कैसे बढ़ाएँ, मैनुअल में क्या लिखें और उनकी गणितीय व्याख्या को कैसे व्यक्त करें।

### गतिविधि 3: छात्र-छात्राएँ क्लिनोमीटर बनाएँगे

अपने छात्र-छात्राओं को निम्न बताएँ:

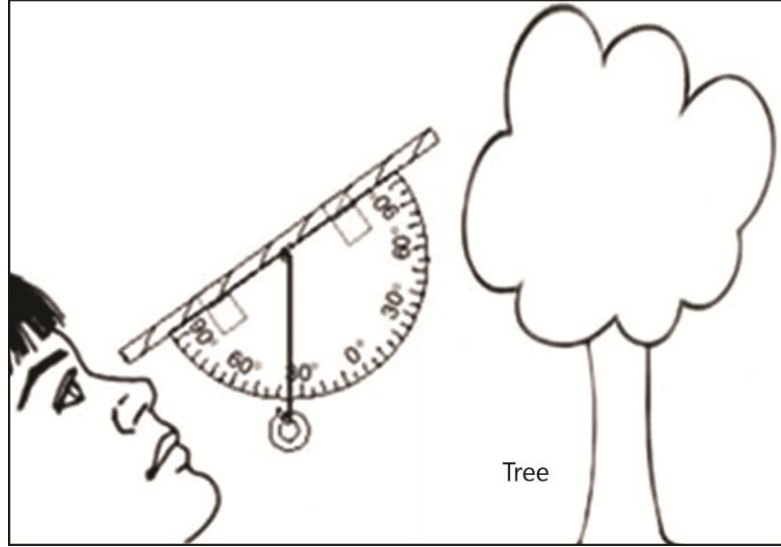
इस गतिविधि में छात्र-छात्राओं को एक क्लिनोमीटर बनाने को कहा जाता है। यह ऐसा उपकरण है जो पेड़, लैंडमार्क या इमारतों की ऊँचाई मापने में सर्वेक्षकों की मदद करने वाला उपकरण है। फिर आपसे यह कल्पना करने को कहा जाता है कि आप किसी ऐसी कंपनी में काम करते हैं, जो ऐसे क्लिनोमीटर बनाती है और आपको इसे उपयोग करने का मैनुअल बनाना है। याद रखें कि आपके ग्राहक ऐसे सर्वेक्षक हैं, जिन्हें गणित और त्रिकोणमिति का अच्छा ज्ञान है, इसलिए इस बारे में गणितीय व्याख्याएँ बेझिझक शामिल करें कि ऊँचाई निकालने के लिए क्लिनोमीटर का उपयोग क्यों और कैसे किया जा सकता है।

एक क्लिनोमीटर बनाने के लिए आपको पहले अपना प्रोटेक्टर संशोधित करना होगा और इसे चित्र 6 और 7 में बताया गया है।



चित्र 6 क्लिनोमीटर बनाना

क्लिनोमीटर 'ऊँचाई का कोण' (उन्नयन कोण) मापता है और चित्र 7 में बताए अनुसार आपको इसका उपयोग करना है।



चित्र 7: क्लिनोमीटर में ऊँचाई के कोण का प्रदर्शन।

अपनी नियमपुस्तिका या मैनुअल बनाने में मदद पाने के लिए इन प्रश्नों का उत्तर दें:

- इस उपकरण के कौन-कौन से घटक हैं और वे कैसे कार्य करते हैं? इसमें क्या गणित में शामिल है? यह ऐसी ड्रॉइंग बनाने में मदद कर सकता है, जो आपके सोच की कार्यविधि है।
- यह पता करें कि ऊँची वस्तुओं की ऊँचाई निकालने के लिए आप अपने क्लिनोमीटर का उपयोग कैसे कर सकते हैं। इसमें क्या गणित शामिल है? यह ऐसी ड्रॉइंग बनाने में मदद कर सकता है, जो आपके अनुसार इसकी कार्यविधि है।
- क्या होता है, जब आप किसी पहाड़ी पर खड़े होते हैं और जिस वस्तु को माप रहे हैं, वह पहाड़ी की चोटी पर है? क्या आपको दूसरी विधि चाहिए या नहीं?
- अपना मैनुअल इसके उपयोगकर्ताओं को यह बताने के लिए लिखें कि क्लिनोमीटर कैसे काम करता है और इसका उपयोग कैसे करें। याद रखें कि ड्रॉइंग से यह अधिक स्पष्ट हो सकता है।

### केस स्टडी 3: गतिविधि 3 के उपयोग का अनुभव श्रीमती पूजा बताती हैं

शुरुआत में इस कार्य के उपयोग के बारे में मुझे अनिश्चितता महसूस हुई। सामान्यतः, कार्यों को छोटी गतिविधियों या अभ्यासों में तोड़ा जाता है, जो छात्र-छात्राओं को बताता है कि चरण-दर-चरण क्या करें। यह कार्य तुलनात्मक रूप से अव्यवस्थित लगा!

मैंने छात्र-छात्राओं को मेरी यह चिंता बताने के बारे में तय किया कि यह कार्य वर्गकक्ष में उपयोग होने वाली अन्य सामान्य समस्याओं की तुलना में कम व्यवस्थित है और यह कि मैंने यह सोचा कि उन्हें अधिक मार्गदर्शन और चरणों की आवश्यकता होगी। शायद उन्होंने इसे चुनौती के रूप में लिया, लेकिन उन्होंने काम को उत्साह और समर्पण से किया। उन्होंने जोड़ियों और तीन के समूहों में यह काम किया। हर 10-15 मिनट के आसपास हमने एक संक्षिप्त प्रतिक्रिया सत्र चलाया, जिसमें विचार साझा किए और समस्याओं और अवलोकनों पर चर्चा की, और इससे मेरे दिमाग को यह शांति मिली कि इस कम व्यवस्थित कार्य को छात्र अच्छे से कर रहे हैं।

हमने पहले यह काम वर्गकक्ष में किया, यह सोचते हुए कि ब्लैकबोर्ड के शीर्ष की ऊँचाई क्या है, लाइट की ऊँचाई क्या है और कक्षा की ऊँचाई क्या है। जब उन्होंने अपने सिद्धांत तैयार कर लिए कि क्लिनोमीटर ने कैसे काम किया, हम बाहर गए, रस्सी और मापक टेप ली और विद्यालय, कुछ पेड़ों की ऊँचाई और पहली मंजिल की खिड़की की दूरी निकालने का प्रयास किया। समूहों के बीच गणनाओं की तुलना करने से छात्र-छात्राओं को अपनी विधियों, अपनी गणनाओं की सटीकता और अपनी मापों की शुद्धता पर विचार करने का अवसर मिला। छात्र-छात्राओं को अपने मैन्यूअल को साथ बनाने में आनंद आया और इसे समाप्त करने के लिए उन्होंने इसे घर ले जाने की इच्छा जताई।

इस कार्य से मुझे यह सोचने का अवसर मिला कि क्यों न समस्याओं को चरण दर चरण निर्देशों में तोड़ा जाए। अब मैं यह भी सोचती हूँ कि मुझे इन चरण-दर-चरण कार्यों में छात्र-छात्राओं के अधिगम या चिंतन में कोई सहायता नहीं करनी चाहिए थी: यह उन्हें बताता है कि क्या करना है और कैसे सोचना है, इसलिए इसमें रचनात्मकता का छोटा सा विकल्प या अवसर मौजूद है। मैं सुनिश्चित नहीं हूँ कि मैं इन चरण-दर-चरण कार्यों को अधिक व्यवस्थित कार्यों में बदल पाऊँगी, लेकिन मैं शायद कुछ चरणों को निकालकर, दी गई तालिका को हटाकर, आदि से शुरुआत करूँगी, ताकि छात्र स्वयं इसका पता लगाएँ।



#### ज़रा सोचिए

- आपका वर्गकक्ष कैसा रहा? अपने छात्र-छात्राओं की समझ का पता लगाने के लिए आपने क्या सवाल किए? क्या आपको लगा कि आपको किसी समय हस्तक्षेप करना होगा? किन बिंदुओं पर आपको लगा कि आपको और समझाना होगा? क्या आपने श्रीमती पूजा की तरह कार्य को किसी तरह बदला था? यदि ऐसा है, तो आपने ऐसा किस कारण से किया?

#### 5 सारांश

इस इकाई में त्रिकोणमिति से संबंधित कुछ विचारों की चर्चा की गई, लेकिन इसका मुख्य उद्देश्य रचनात्मकता पर और छात्र-छात्राओं को यह सोचने के लिए प्रेरित करने पर रहा है कि 'क्या होगा यदि...?', या 'संभावना' चिंतन पर रहा है। संभावना चिंतन में छात्र-छात्राओं को रचनात्मक बनने, चीजें आजमाने और अपने स्वयं के निर्णय करने के लिए कहा जाता है – और इसलिए वे गलतियाँ भी करते हैं।

शिक्षक कभी-कभी सोचते हैं कि छात्र-छात्राओं को गलतियाँ करने से रोकना उनका कार्य है। इस इकाई में यह बताया जाता है कि शिक्षक का कार्य छात्र-छात्राओं को गलतियाँ करने देना और उनसे सीखने देना है। छात्र-छात्राओं को 'विचारों से

खेलना' को कहने का अर्थ है कि वे अपने स्वयं के रचनात्मक पक्ष का अभ्यास करते हैं, ढेर सारे विचार आदि आजमाने, सीखी गई बातों को वास्तव में जानकर और समझकर समाप्त करते हैं।

अपने छात्र-छात्राओं को रचनात्मक और आनंद लेने वाला बनने, और स्वयं चुनाव करने को कहने का अर्थ यह भी है कि वे अपरिचित संदर्भ में कुछ पूछे जाने पर अधिक सहज होते हैं, जैसा कि अक्सर परीक्षा में होता है। वे यह जानते हैं कि जब वे किसी विचार के बारे में सोचते हैं और कुछ चीजें आजमाते हैं, तो वे कोई ऐसी समस्या सुलझा सकते हैं, जो शुरू करने में कठिन लगती है – ठीक उसी तरह जैसा उन्होंने पहले किया था।



### ज़रा सोचिए

- इस इकाई में आपके द्वारा उपयोग किए गए तीन विचार पहचानें जो अन्य विषयों को पढ़ाने में भी काम करेंगे। उन दो विषयों पर अब एक सीखने की योजना तैयार करें, जिन्हें आप जल्द ही पढ़ाने वाले हैं, जहाँ थोड़े-बहुत समायोजन के साथ उन अवधारणाओं का उपयोग किया जा सकता है।

## संसाधन

### संसाधन 1: NCF/NCFTE की शिक्षण आवश्यकताएं

इस इकाई की सीख नीचे बताई गई NCF (2005) और NCFTE (2009) की सीखने-सिखाने की प्रक्रिया की आवश्यकताओं से जुड़ी है:

- शिक्षार्थियों को उनके शिक्षण में सक्रिय प्रतिभागी के रूप में देखें न कि सिर्फ ज्ञान प्राप्त करने वाले के रूप में; ज्ञान निर्माण के लिए उनकी क्षमताओं को प्रोत्साहित करने के लिए; रोट पद्धतियों (रटना) से शिक्षण को दूर ले जाने के लिए।
- अधिगम (सीखने) को निजी अनुभवों से अर्थ की खोज के रूप में और ज्ञान निर्माण को विचारात्मक सीखने की निरंतर विकास प्रक्रिया के रूप में देखें।
- छात्र-छात्राओं को गणित से डरने के बजाय उसका आनंद उठाना सिखाने के लिए समर्थन।
- विद्यालय के ज्ञान को समुदाय के ज्ञान और विद्यालय के बाहर के जीवन से जोड़ें।

### संसाधन 2: अनुश्रवण करना और प्रतिपुष्टि (फीडबैक) देना

छात्र-छात्राओं के प्रदर्शन में सुधार करने में उनकी निरंतर अनुश्रवण करना और प्रत्युत्तर देना शामिल है, ताकि उन्हें पता हो कि उनसे क्या अपेक्षित है और कार्य पूरा करने के बाद उन्हें प्रतिक्रिया मिलती है। आपके रचनात्मक प्रतिक्रिया से वे अपना प्रदर्शन सुधार सकते हैं।

### अनुश्रवण करना

प्रभावी शिक्षक अधिकांश समय अपने छात्र-छात्राओं का अनुश्रवण करते हैं। सामान्य तौर पर, अधिकांश शिक्षक यह सुनकर और देखकर अपने छात्र-छात्राओं का अनुश्रवण करते हैं कि वे कक्षा में क्या कर रहे हैं। छात्र-छात्राओं की प्रगति का अनुश्रवण करना महत्वपूर्ण है, क्योंकि इससे उन्हें इस बात में मदद मिलती है:

- अच्छी ग्रेड प्राप्त करना
- अपने प्रदर्शन के बारे में अधिक सजग रहना और अपने सीखने के बारे में अधिक जिम्मेदार बनना
- अपना अधिगम बेहतर बनाना
- राज्य के और स्थानीय मानकीकृत परीक्षणों में उपलब्धियों की अपेक्षा (भविष्यवाणी) करना।



एक शिक्षक/शिक्षिका के रूप में इससे आपको यह तय करने में भी मदद मिलेगी:

- कब प्रश्न पूछना है या कब संकेत देना है
- कब सराहना करनी है
- कब चुनौती देना है
- छात्र-छात्राओं के विभिन्न समूहों को कार्य में कैसे शामिल करें
- गलतियों का क्या करना है।

छात्र तब अधिक बेहतर कार्य करते हैं, जब उन्हें अपनी प्रगति के बारे में स्पष्ट और त्वरित प्रतिक्रिया दी जाती है। अनुश्रवण का उपयोग करने से आप नियमित प्रतिक्रिया दे पाएँगे, जिससे आपके छात्र-छात्राओं को पता चलेगा कि वे कैसा काम कर रहे हैं और अपने अधिगम को आगे बढ़ाने के लिए उन्हें और क्या करना है।

एक और चुनौती जो आपको आएगी, वह छात्र-छात्राओं के लिए उनके स्वयं के अधिगम लक्ष्य तय करना है, जिसे स्व-अनुश्रवण के रूप में भी जाना जाता है। छात्र-छात्राओं को, विशेष रूप से कमजोर, अपने स्वयं के सीखने-सिखाने का स्वामित्व लेने की आदत नहीं होती। लेकिन आप किसी भी छात्र-छात्रा की किसी प्रोजेक्ट के लिए उसके स्वयं के लक्ष्य या उद्देश्य तय करने, अपने कार्य की योजना बनाने और समयसीमा तय करने, और अपनी प्रगति की स्व-अनुश्रवण करने में मदद कर सकते हैं। प्रक्रिया का अभ्यास करना और स्व-अनुश्रवण के कौशल में विशेषज्ञता पाना विद्यालय और उनके पूरे जीवन में उनके काम आएगा।

### छात्र-छात्राओं की बात सुनना और अवलोकन करना

अधिकांश समय शिक्षक सहज रूप से ही छात्र-छात्राओं की बात सुनते और उनका अवलोकन करते रहते हैं; यह एक सरल अनुश्रवण उपकरण है। उदाहरण के लिए, आप यह कर सकते हैं:

- अपने छात्र-छात्राओं को ज़ोर से पढ़ते सुनना
- जोड़ी या समूहकार्य में चर्चाओं को सुनना
- बाहर और वर्गकक्ष में संसाधनों का उपयोग करते छात्र-छात्राओं का अवलोकन करना
- समूहों के काम करते समय उनकी शारीरिक भाषा अवलोकन करना।

सुनिश्चित करें कि आपके द्वारा संग्रहीत अवलोकन छात्र-छात्राओं के सीखने या प्रगति का वास्तविक प्रमाण हो। केवल वही बात दस्तावेजीकृत करें जो आप देखते, सुनते, उचित मानते हैं या जिसपर भरोसा करते हैं।

जब छात्र-छात्राएँ कार्य करें, तो वर्गकक्ष में घूमें और अवलोकन के संक्षिप्त नोट बनाएँ। आप यह रिकॉर्ड करने के लिए वर्गकक्ष सूची का उपयोग कर सकते हैं कि किन छात्र-छात्राओं को अधिक मदद चाहिए, और वे गलतफहमियाँ भी नोट करें जो बातचीत से पता चल रही हैं। आप इन अवलोकनों और नोट्स का उपयोग पूरी कक्षा को प्रतिक्रिया देने में कर सकते हैं या समूहों या अलग-अलग लोगों को संकेत दे और प्रोत्साहित कर सकते हैं।

### प्रतिक्रिया देना

प्रतिक्रिया वह जानकारी होती है, जो आप तय लक्ष्य या अपेक्षित परिणाम के संबंध में किसी छात्र-छात्राएँ के प्रदर्शन के बारे में उसे देते हैं। प्रभावी प्रतिक्रिया से छात्र-छात्राएँ को यह प्राप्त होता है:

- जो हुआ उसके बारे में जानकारी
- यह मूल्यांकन कि कोई कार्यवाही या कार्य कितनी अच्छी तरह हुआ
- मार्गदर्शन कि उनके प्रदर्शन कैसे बेहतर बन सकता है।

जब आप हर छात्र-छात्रा को प्रतिक्रिया देते हैं, तो उन्हें उससे यह जानने में मदद मिलनी चाहिए:

- वे वास्तव में क्या कर सकते हैं
- वे अभी तक क्या नहीं कर सकते
- अन्य लोगों की तुलना में उनका काम कैसा है
- वे कैसे बेहतर कर सकते हैं।

यह याद रखना महत्वपूर्ण है कि प्रभावी प्रतिक्रिया छात्र-छात्राओं की मदद करती है। आपकी प्रतिक्रिया के अस्पष्ट या अनुचित होने के कारण आप सीखने में बाधा पहुँचाना नहीं चाहेंगे। प्रभावी प्रतिक्रिया है:

- किए जा रहे कार्य और छात्र-छात्राओं द्वारा प्राप्त की जाने वाली शिक्षा पर केंद्रित
- स्पष्ट और पक्षपातरहित, जो छात्र-छात्राओं को यह बताए कि उनकी शिक्षा में क्या अच्छा है और यह कि कहाँ सुधार की संभावना है
- कार्रवाई योग्य, जो छात्र-छात्राओं को वे चीजें बताए जो वे कर सकते हैं
- सही भाषा में दिया गया जिसे छात्र-छात्रा समझ सकें
- सही समय पर दिया गया – यदि इसे बहुत जल्दी दिया जाएगा, तो छात्र-छात्राएँ सोचेंगे कि 'मैं यही तो करने वाला था/वाली थी!'; यदि बहुत देर से दिया जाएगा, तो तब तक छात्र-छात्राओं का ध्यान कहीं ओर चला जाएगा और वे वापस नहीं जाना चाहेंगे और बताई गई चीज़ नहीं करना चाहेंगे।

चाहे प्रतिक्रिया छात्र-छात्राओं को बोलकर दी जाती है या उनकी कार्यपुस्तिका में लिखी जाती है, यह अधिक प्रभावी होती है, जब यह नीचे दिए गए दिशानिर्देशों का अनुसरण करती है।

### प्रशंसा और सकारात्मक भाषा का उपयोग करना

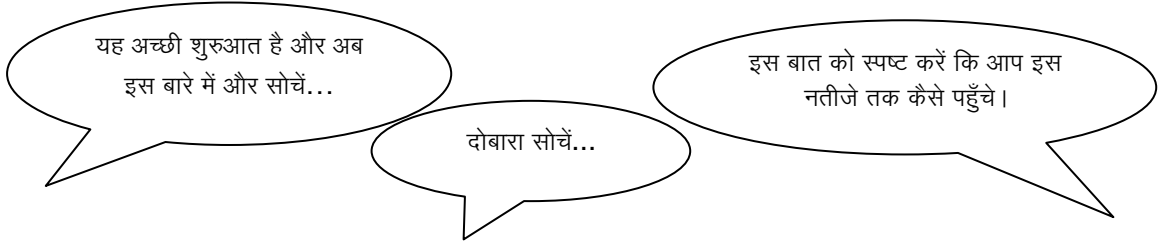
जब हमारी प्रशंसा की जाती है और हमें प्रोत्साहित किया जाता है, तो आमतौर पर हम उस समय के मुकाबले काफी बेहतर महसूस करते हैं, जबकि हमारी आलोचना की जाती है या हमारी गलती सुधारी जाती है। सुदृढीकरण और सकारात्मक भाषा समूची कक्षा और सभी उम्र के व्यक्तियों के लिए प्रेरणादायक होती है। याद रखें कि प्रशंसा किए गए कार्य के लिए विशिष्ट और उस पर लक्षित होनी चाहिए न कि छात्र-छात्रा पर केंद्रित, अन्यथा यह छात्र-छात्रा की प्रगति में मदद नहीं करेगी। 'बहुत अच्छा' अविशिष्ट है, इसलिए निम्न में से कोई एक कहना ज्यादा अच्छा है:



### संकेत देने के साथ-साथ सुधार का उपयोग करना

अपने छात्र-छात्राओं के साथ आप जो संवाद करते हैं, वह उनके सीखने में उनकी मदद करता है। यदि आप उन्हें कहते हैं कि उनका उत्तर गलत है और संवाद वहीं खत्म कर देते हैं, तो आप सोचना जारी रखने और स्वयं के लिए प्रयास करने में मदद करने का अवसर खो देते हैं। यदि आप छात्र-छात्राओं को संकेत देते हैं या आगे और प्रश्न पूछते हैं, तो आप उन्हें अधिक गहराई से सोचने का संकेत देते हैं और उन्हें उत्तर ढूँढने के लिए और अपनी स्वयं की सीखने की जिम्मेदारी लेने के

लिए प्रोत्साहित करते हैं। उदाहरण के लिए, आप निम्न बातें कहते हुए किसी समस्या के बेहतर उत्तर के लिए प्रोत्साहित कर सकते हैं या किसी अन्य दृष्टिकोण का संकेत दे सकते हैं:



हो सकता है कि दूसरे छात्र-छात्राओं को एक दूसरे की मदद करने के लिए प्रोत्साहित करना उपयुक्त हो। आप निम्न जैसी टिप्पणियों के साथ शेष कक्षा से अपने प्रश्न साझा करके यह कर सकते हैं:



‘हां’ या ‘नहीं’ के साथ सुधार वर्तनी या संख्या के अभ्यास की तरह के कामों के लिए उपयुक्त हो सकता है, लेकिन यहां पर भी आप छात्र-छात्राओं को उनके उत्तरों में उभरते ढाँचा (पैटर्न) पर नजर डालने, समान उत्तरों से संबंध बनाने या इस बारे में चर्चा करने के लिए संकेत कर सकते हैं कि कोई उत्तर गलत क्यों है।

स्वयं सुधार और साथी द्वारा सुधार प्रभावी होता है और जोड़ियों में कोई कार्य या असाइनमेंट (दत्तकार्य) करते समय आप छात्र-छात्राओं को अपना स्वयं का और एक-दूसरे का काम जाँचने को कहकर इसे प्रोत्साहित कर सकते हैं। एक समय में ठीक करने के लिए एक पहलू पर ध्यान केंद्रित करना सबसे अच्छा होता है, ताकि भ्रम में डालने वाली ढेर सारी जानकारी न हो।

### अतिरिक्त संसाधन

- A newly developed maths portal by the Karnataka government: <http://karnatakaeducation.org.in/KOER/en/index.php/Portal:Mathematics>
- Class X maths study material: [http://www.zietmysore.org/stud\\_mats/X/maths.pdf](http://www.zietmysore.org/stud_mats/X/maths.pdf)
- National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics: <https://www.ncetm.org.uk/>
- National STEM Centre: <http://www.nationalstemcentre.org.uk/>
- OpenLearn: <http://www.open.edu/openlearn/>
- BBC Bitesize: <http://www.bbc.co.uk/bitesize/>
- Khan Academy's math section: <https://www.khanacademy.org/math>
- NRICH: <http://nrich.maths.org/frontpage>
- Mathcelebration: <http://www.mathcelebration.com/>
- समस्या समाधान की कला का संसाधन पृष्ठ: <http://www.artofproblemsolving.com/Resources/index.php> {Art of Problem Solving's resources page: <http://www.artofproblemsolving.com/Resources/index.php>}

- प्रौद्योगिकी: <http://www.teach-nology.com/worksheets/math/> {Teachnology: <http://www.teach-nology.com/worksheets/math/>}
- गणित मजेदार है: <http://www.mathsisfun.com/> {Maths is Fun: <http://www.mathsisfun.com/>}
- गणित में अध्यापक प्रशिक्षण और गणित सिखाने के लिए राष्ट्रीय शिक्षण अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद की किताबें: <http://www.ncert.nic.in/ncerts/textbook/textbook.htm> {National Council of Educational Research and Training's textbooks for teaching mathematics and for teacher training of mathematics: <http://www.ncert.nic.in/ncerts/textbook/textbook.htm>}
- LMT-01 *गणित सीखना*, ब्लॉक 1 ('सीखने के तरीके') ब्लॉक 2 ('कक्षा में शिक्षण को प्रोत्साहित करना'), ब्लॉक 6 ('गणितीय चिंतन'): <http://www.ignou4ublog.com/2013/06/ignou-lmt-01-study-materialbooks.html> {LMT-01 Learning Mathematics, Block 1 ('Approaches to Learning') Block 2 ('Encouraging Learning in the Classroom'), Block 6 ('Thinking Mathematically'): <http://www.ignou4ublog.com/2013/06/ignou-lmt-01-study-materialbooks.html> }
- *शिक्षण वक्र और समकोण पर*, गणित और इसके शिक्षण की पत्रिकाएँ: [http://azimpremijfoundation.org/Foundation\\_Publications](http://azimpremijfoundation.org/Foundation_Publications) {Learning Curve and At Right Angles, periodicals about mathematics and its teaching: [http://azimpremijfoundation.org/Foundation\\_Publications](http://azimpremijfoundation.org/Foundation_Publications)}
- केन्द्रीय माध्यमिक शिक्षा बोर्ड की पुस्तकें और सहायक सामग्री (जिसमें *निर्माणात्मक मूल्यांकन के लिए शिक्षक मैनुअल – गणित (कक्षा IX)* भी शामिल है) – 'CBSE प्रकाशन' चुनें, फिर 'पुस्तकें और सहायक सामग्री': <http://cbse.nic.in/welcome.htm>
- [https://www.google.co.in/search?q=shershah+ka+rauza&biw=1366&bih=625&tbn=isch&imgil=D8CDQI--FpHErM%253A%253BBTfp1\\_hJ9GVeM%253Bhttp%25253A%25252F%25252Fwww.frontline.in%25252Fstatic%25252Fhtml%25252Ffl2820%25252Fstories%25252F20111007282006200.htm&source=iu&pf=m&fir=D8CDQI--FpHErM%253A%252CBTfp1\\_hJ9GVeM%252C\\_&usq=\\_ZLS6nWJz8iJ9pJBneTnKdjfy7E%3D&ved=0CCYQyjc&ei=nVpQVeSiHNWGuASy04GoBg#imgrc=R2zuAICoMsoaDM%253A%3B2z4drwDVfeu6rM%3Bhttp%253A%252F%252Fthinkinparticle.com%252Fsites%252Fdefault%252Ffiles%252Fimagecache%252Fnode-gallery-display%252FLake%252520and%252520Tomb%252520of%252520Sher%252520Shah.JPG%3Bhttp%253A%252F%252Fthinkingparticle.com%252Ffeatured-content%252Fmore%252F1%253Fnid%253D65%3B715%3B477](https://www.google.co.in/search?q=shershah+ka+rauza&biw=1366&bih=625&tbn=isch&imgil=D8CDQI--FpHErM%253A%253BBTfp1_hJ9GVeM%253Bhttp%25253A%25252F%25252Fwww.frontline.in%25252Fstatic%25252Fhtml%25252Ffl2820%25252Fstories%25252F20111007282006200.htm&source=iu&pf=m&fir=D8CDQI--FpHErM%253A%252CBTfp1_hJ9GVeM%252C_&usq=_ZLS6nWJz8iJ9pJBneTnKdjfy7E%3D&ved=0CCYQyjc&ei=nVpQVeSiHNWGuASy04GoBg#imgrc=R2zuAICoMsoaDM%253A%3B2z4drwDVfeu6rM%3Bhttp%253A%252F%252Fthinkinparticle.com%252Fsites%252Fdefault%252Ffiles%252Fimagecache%252Fnode-gallery-display%252FLake%252520and%252520Tomb%252520of%252520Sher%252520Shah.JPG%3Bhttp%253A%252F%252Fthinkingparticle.com%252Ffeatured-content%252Fmore%252F1%253Fnid%253D65%3B715%3B477)

### संदर्भ/संदर्भग्रंथ सूची

Aristeidou, V. (2011) 'Exploring the characteristics of students' possibility thinking and teacher pedagogy in the drama game method in Cypriot primary education', paper presented at ICSEI 2011 conference. Available from: <http://www.icsei.net/icsei2011/Full%20Papers/0174.pdf> (accessed 16 July 2014).

Craft, A., Cremin, T., Burnard, P., Dragovic, T. and Chappell, K. (2012) 'Possibility thinking: culminative studies of an evidence-based concept driving creativity?' *Education 3-13: International Journal of Primary, Elementary and Early Years Education*, vol. 40, pp. 1–19.

Freudenthal, H. (1991) *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*. Dordrecht: Kluwer.

Grainger, T., Craft, A. and Burnard, P. (2007) 'Examining possibility thinking in action in early years settings', paper presented at Imaginative Education Research Symposium, 12–15 July 2006, Vancouver, Canada.

Herbert, A. (2010) *The Pedagogy of Creativity*. Abingdon: Routledge.

National Council of Educational Research and Training (2005) *National Curriculum Framework (NCF)*. New Delhi: NCERT.

National Council of Educational Research and Training (2009) *National Curriculum Framework for Teacher Education (NCFTE)*. New Delhi: NCERT.

National Council of Educational Research and Training (2012a) *Mathematics Textbook for Class IX*. New Delhi: NCERT.

National Council of Educational Research and Training (2012b) *Mathematics Textbook for Class X*. New Delhi: NCERT.

Polya, G. (1957) *How to Solve It*. New York, NY: Anchor.

Polya, G. (1962) *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving*, combined edn. New York, NY: Wiley.

Watson, A., Jones, K. and Pratt, D. (2013) *Key Ideas in Teaching Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

### अभिस्वीकृतियाँ

तृतीय पक्षों की सामग्रियों और अन्यथा कथित को छोड़कर, यह सामग्री क्रिएटिव कॉमन्स एट्रिब्यूशन-शेयरएलाइक लाइसेंस के अंतर्गत उपलब्ध कराई गई है (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>)। नीचे दी गई सामग्री मालिकाना हक की है तथा इस परियोजना के लिए लाइसेंस के अंतर्गत ही उपयोग की गई है, तथा इसका Creative Commons लाइसेंस से कोई वास्ता नहीं है। इसका अर्थ यह है कि इस सामग्री का उपयोग अननुकूलित रूप से केवल TESS-India परियोजना के भीतर किया जा सकता है और किसी भी बाद के OER संस्करणों में नहीं। इसमें TESS-India, OU और UKAID लोगो का उपयोग भी शामिल है।

इस इकाई में सामग्री को पुनः प्रस्तुत करने की अनुमति के लिए निम्न स्रोतों का कृतज्ञतापूर्ण आभार:

चित्र 5: दिल्ली के रेड फोर्ट या लाल किले की फोटो के लिए साभार क्लेयर ली। (Figure 5: photo of the Red Fort or Lal Qil'ah in Delhi courtesy of Clare Lee.)

कॉपीराइट के स्वामियों से संपर्क करने का हर प्रयास किया गया है। यदि किसी को अनजाने में अनदेखा कर दिया गया है, तो पहला अवसर मिलते ही प्रकाशकों को आवश्यक व्यवस्थाएं करने में हर्ष होगा।

वीडियो (वीडियो स्टिल्स सहित): भारत भर के उन शिक्षक प्रशिक्षकों, प्रधानाध्यापकों, शिक्षकों और छात्र-छात्राओं के प्रति आभार प्रकट किया जाता है जिन्होंने उत्पादनों में दि ओपन यूनिवर्सिटी के साथ काम किया है।