प्रारंभिक गणित

दैनिक जीवन के संदर्भों का उपयोग करना: औपचारिक भाग कलन विधि

भारत में विद्यालय समर्थित शिक्षक शिक्षा

www.TESS-India.edu.in

http://creativecommons.org/licenses/

एस.आर.मोहन्ती
अपर मुख्य सचिव

अ.शा.पत्र क्र R.S.K/10
दूरभाष कार्यालय - 0755-4251330
मध्यप्रदेश शासन
स्कूल शिक्षा विभाग
मंत्रालय, वल्लभ भवन, भोपाल-462 004
भोपाल, दिनांक 20-1-2016

संदेश

प्रिय शिक्षक साथियों,

बच्चों की शिक्षा को गुणवत्तापूर्ण और रोचक बनाने के लिए स्कूल शिक्षा विभाग निरन्तर प्रयासरत् है। आप सभी के प्रयासों से शिक्षकों के शिक्षण कौशल में भी निखार आया है और शालाओं में कक्षा शिक्षण भी आंनददायी तथा बेहतर हुआ है।

इसी दिशा में शिक्षकों को बाल केन्द्रित शिक्षण की ओर उन्मुख करने और शिक्षक प्रशिक्षण की गुणवत्ता को बेहतर बनाने के उद्देश्यों को लेकर, TESS India द्वारा मुक्त शैक्षिक संसाधनों (Open Educational Resources) का विकास किया गया हैं। इनका उपयोग शिक्षण कार्य में सहजता व सुगमतापूर्वक किया जा सकता है। आशा है कि ये संसाधन, शिक्षकों एवं शिक्षक प्रशिक्षकों के व्यावसायिक उन्नयन और क्षमतावर्द्धन में लाभकारी और उपयोगी सिद्ध होंगे।

राज्य शिक्षा केन्द्र के संयुक्त तत्वाधान में TESS India द्वारा स्थानीय भाषा में तैयार किये गये मुक्त शैक्षिक संसाधनों (Open Educational Resources) को www.educationportal.mp.gov.in पर भी उपलब्ध कराया गया हैं। आशा है इन संसाधनों के उपयोग से प्रदेश के शिक्षक और शिक्षक प्रशिक्षक लाभान्वित होंगे और कक्षाओं में पठन पाठन को रूचिकर और गुणवत्तायुक्त बनाने में मदद मिलेगी।

शुभकामनाओं सहित,

(एस.आर.मोहन्ती)

दीप्ति गौड मुकर्जी
आयुक्त
राज्य शिक्षा केन्द्र एवं
सचिव
मध्यप्रदेश शासन
स्कूल शिक्षा विभाग

अर्द्ध शा. पत्र क्र.: 8
दिनांक : 12-1-16
पुस्तक भवन, बी-विंग
अरेरा हिल्स, भोपाल-462011
फोन : (का.) 2768392
फैक्स : (0755) 2552363
वेबसाइट : www.educationportal.mp.gov.in
ई-मेल : rskcommmp@nic.in

संदेश

प्रिय शिक्षक साथियों,

सभी बच्चों को रूचिकर और बाल केन्द्रित शिक्षा उपलब्ध हो इसके लिए आवश्यक है कि हमारे शिक्षकों को शिक्षण की नवीनतम तकनीकों और शिक्षण विधियों से परिचित कराया जाए साथ ही इन तकनीकों के उपयोग के लिए उन्हे प्रोत्साहित भी किया जाए। TESS India द्वारा तैयार किये गये मुक्त शैक्षिक संसाधनों (Open Educational Resources) के उपयोग से शिक्षक शिक्षण प्रविधि के व्यावहारिक उपयोग को सीख सकते हैं। इनकी सहायता से शिक्षक न केवल विषय वस्तु को सुगमता पूर्वक पढ़ा सकते हैं बल्कि पठन पाठन की इस प्रक्रिया में बच्चों की अधिक से अधिक सहभागिता भी सुनिश्चित कर सकते हैं।

राज्य शिक्षा केन्द्र स्कूल शिक्षा विभाग ने स्थानीय भाषा में तैयार किये गये इन मुक्त शैक्षिक संसाधनों (Open Educational Resources) को अपने पोर्टल www.educationportal.mp.gov.in पर भी उपलब्ध कराया है।

आशा हैं, कि आप इन संसाधनों का कक्षा शिक्षण के दौरान नियमित रूप से उपयोग करेंगे और अपने शिक्षण कौशल में वृद्धि करते हुए बच्चों की पढ़ाई को आनंददायक बनाने का प्रयास करेंगे।

शुभकामनाओं सहित,

(दीप्ति गौड मुकर्जी)

शिक्षा का अधिकार
सर्व शिक्षा अभियान
सब पढ़ें सब बढ़ें

टेस–इण्डिया स्थानीयकृत ओईआर निर्माण में सहयोग

मार्गदर्शन एवं समीक्षा :
श्रीमती स्वाति मीणा नायक, अपर मिशन संचालक, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
डॉ. एच. के. सेनापति, प्राचार्य, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
डॉ. ओ.पी.शर्मा, अपर संचालक, मध्यप्रदेश एससीईआरटी
डॉ. अशोक कुमार पारीक उपसंचालक, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
श्री आर. पी. त्रिपाठी, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
प्रो.जयदीप मंडल, विभागाध्यक्ष विज्ञान एवं गणित शिक्षा संकाय, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
डॉ. आर. रायजादा, सहप्राध्यापक एवं विभागाध्यक्ष विस्तार शिक्षा, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
डॉ. वी.जी. जाधव, से.नि. प्राध्यापक भौतिक, एनसीईआरटी
डॉ. के. बी. सुब्रमण्यम से.नि. प्राध्यापक गणित, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
डॉ. आई. पी. अग्रवाल से.नि. प्राध्यापक विज्ञान, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
डॉ. अश्विनी गर्ग सहा. प्राध्यापक गणित संकाय, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
डॉ. एल. के. तिवारी, सहप्राध्यापक विज्ञान, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
श्री एल.एस.चौहान, सहा. प्राध्यापक विज्ञान, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
डॉ. श्रुति त्रिपाठी, सहा. प्राध्यापक अंग्रेजी, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
डॉ. रजनी थपलियाल, व्याख्याता अंग्रेजी, ईएलटीआई, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
डॉ. मधु जैन, व्याख्याता शास. उच्च शिक्षा उत्कृष्टता संस्थान, भोपाल
डॉ. सुशोवन बनिक, सहा. प्राध्यापक क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
डॉ. सौरभ कुमार मिश्रा, सहा. प्राध्यापक क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
श्री. अजी थॉमस, सहा. प्राध्यापक क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
डॉ. राजीव कुमार जैन, सहा. प्राध्यापक क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
स्थानीयकरण :
भाषा एवं साक्षरता
डॉ. लोकेश खरे, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
डॉ. एम.एल. उपाध्याय से.नि. व्याख्याता शास. उत्कृष्ट उ.मा.विद्यालय मुरैना
श्री रामगोपाल रायकवार ,कनि. व्याख्याता, डाइट कुण्डेश्वर, टीकमगढ़
डॉ. दीपक जैन अध्यापक, शास. उत्कृष्ट उ.मा.विद्यालय क्र 1 टीकमगढ़
अंग्रेजी
श्री राजेन्द्र कुमार पाण्डेय, प्राचार्य, ईएलटीआई, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
श्रीमती कमलेश शर्मा. डायरेक्टर , ईएलटीआई, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
श्री हेमंत शर्मा, प्राचार्य, ईएलटीआई, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
श्री मनोज कुमार गुहा वरि. व्याख्याता, एससीईआरटी. मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
डॉ. एफ.एस.खान, वरि.व्याख्याता, प्रगत शैक्षिक अध्ययन संस्थान (आईएएसई) भोपाल
श्री सुदीप दास, प्राचार्य, शास.उ.मा.विद्यालय दालौदा, मन्दसौर
श्रीमती संगीता सक्सेना, व्याख्याता, ,शास.कस्तूरबा कन्या उ.मा.विद्यालय भोपाल
गणित
श्री बी.बी. पी. गुप्ता, समन्वयक गणित, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
श्री ए. एच. खान प्राचार्य शास.उ.मा.विद्यालय रामाकोना, छिंदवाड़ा
डॉ. राजेन्द्र प्रसाद गुप्त , प्राचार्य शास. जीवाजी ऑब्जर्वेटरी उज्जैन
डॉ.आर,सी. उपाध्याय, वरि. व्याख्याता, डाइट, सतना
डॉ. सीमा जैन, व्याख्याता, शास. कन्या उ.मा.विद्यालय गोविन्दपुरा, भोपाल
श्री सुशील कुमार शर्मा, शिक्षक, शास. लक्ष्मी मंडी उ.मा.विद्यालय, अशोका गार्डन, भोपाल
विज्ञान
डॉ. अशोक कुमार पारीक उपसंचालक, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र भोपाल
डॉ. सुसम्मा जॉनसन, व्याख्याता एस.आई.एस.ई. जबलपुर मध्यप्रदेश
डॉ.सुबोध सक्सैना, समन्वयक एससीईआरटी मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र भोपाल
श्री आर. पी. त्रिपाठी, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
श्री अरूण भार्गव, वरि. व्याख्याता, एससीईआरटी, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र भोपाल
श्रीमती सुषमा भट्ट, वरि.व्याख्याता, एससीईआरटी, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
श्री ब्रजेश सक्सेना, प्राचार्य, एससीईआरटी, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
डॉ. रेहाना सिद्दकी से.नि. व्याख्याता सेन्ट फ्रांसिस हा. से. स्कूल भोपाल

TESS-India (विद्यालय समर्थित शिक्षक शिक्षा) का उद्देश्य मुक्त शैक्षिक संसाधनों की सहायता से भारत में प्रारंभिक और सेकेण्डरी शिक्षको के कक्षा शिक्षण व कक्षा निष्पादन को सुधारना है जिसमें वे इन संसाधनों की सहायता से बालकेंद्रित, सहभागी दृष्टिकोणों का विकास कर सकें। टेस इंडिया के मुक्त शैक्षिक संसाधन, शिक्षकों के लिए स्कूल पाठ्य पुस्तक के अतिरिक्त, सहयोगी पुस्तिका या संसाधन की तरह हैं। इसमें शिक्षकों के लिए कुछ गतिविधियां दी गई हैं जिन्हे वे कक्षाओ में बच्चों के साथ प्रयोग में ला सकते हैं, इसके साथ–साथ कुछ केस स्टडी भी दी गई हैं जो यह बताती हैं कि कैसे अन्य शिक्षकों ने विषयवस्तु को कक्षाओं में पढ़ाया। अपनी विषय संबंधी जानकारियों को बढ़ाने तथा पाठ योजनाओं को तैयार करने में संसाधनों का उपयोग किया।

TESS-India OER भारतीय पाठ्यक्रम और संदर्भों के अनुकूल भारतीय तथा अंतर्राष्ट्रीय लेखकों के सहयोग से तैयार किये गये है और ये ऑनलाइन तथा प्रिंट रूप में उपयोग के लिए उपलब्ध हैं (*http://www.tess-india.edu.in*) OER कार्यक्रम से जुड़े प्रत्येक भारतीय राज्य के शिक्षकों के उपयोग के लिए उपयुक्त तथा कई संस्करणों में उपलब्ध हैं तथा शिक्षक व उपयोगकर्ता इन्हे अपनी स्थानीय आवश्यकताओं और संदर्भों के अनुरूप इनका स्थानीय करण करके उपयोग कर सकते हैं।

प्रस्तुत संस्करण मध्यप्रदेश की स्थानीय आवश्यकताओं और संदर्भों को ध्यान में रखकर तैयार किया गया है।

वीडियो संसाधन

इस इकाई में कुछ गतिविधियों के साथ यह आइकॉन (संकेत) दिया गया है: . इसका अर्थ है कि आप उक्त विशिष्ट विषय वस्तु या शैक्षणिक प्रविधि को और अधिक समझने के लिए TESS-India के वीडियो संसाधनों की मदद ले सकते हैं।

TESS-India वीडियो ससांधन (Resources) भारतीय परिप्रेक्ष्य में कक्षाओं में उपयोग की जा सकने वाली सीखने–सिखाने की विविध तकनीकों को दर्शाते हैं। हमें यकीन है कि इनसे आपको इसी प्रकार की तकनीकें अपनी कक्षा में करने में मदद मिलेगी। यदि इन वीडियो संसाधनों तक आपकी पहुँच नहीं हो तो कोई बात नहीं। यह वीडियो पाठ्यपुस्तक का स्थान नहीं लेते, बल्कि उसको पढ़ाने में आपकी मदद करते हैं।

TESS-India के वीडियो संसाधनों को TESS-India की वेबसाइट *http://www.tess-india.edu.in/* पर ऑनलाइन देखा जा सकता है या डाउनलोड किया जा सकता है। इसके अतिरिक्त आप इन वीडियो को सीडी या मेमोरी कार्ड में लेकर भी देख सकते हैं।

संस्करण *2.0* *EM08v2*
Madhya Pradesh
तृतीय पक्षों की सामग्रियों और अन्यथा कथित को छोड़कर, यह सामग्री क्रिएटिव कॉमन्स एट्रिब्यूशन-शेयरएलाइक लाइसेंस के अंतर्गत उपलब्ध कराई गई है*: http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/*
TESS-India is led by The Open University UK and funded by UK aid from the UK government

यह इकाई किस बारे में है?

इस अंक में आप अपने विद्यार्थियों को उनके परिचित संदर्भों के माध्यम से भाग कलन विधि के बारे में सिखाने का तरीका जानेंगे। आप इस बात पर भी ध्यान देंगे कि विद्यार्थी किसी मूर्त सोच की बजाय उसका वास्तविक अर्थ बताते हुए किस प्रकार भाग कलन विधि व्यक्त कर सकते हैं।

इन गतिविधियों के माध्यम से आप, अपने विद्यार्थियों द्वारा जटिल विचारों को समझने तथा कार्य बांटने के लिए एक साथ काम करने की योग्यता को विकसित करने के बारे में सोच पाएँगे ताकि अधिक विचारों के बारे में सोचा और अधिक जुड़ावों के बारे में समझा जा सके। आप विद्यार्थियों के लिए इस बात को दृष्टिगोचर बनाने के बारे में भी सोच पाएँगे कि जो कुछ भी चल रहा है, उसके माध्यम से वे गणितीय विचारों को बेहतर नियंत्रण के साथ कर पाने में सक्षम होंगे।

इस इकाई से आप क्या सीख सकते हैं

- भाग कलन विधि के पीछे गणितीय विचारों को समझने में आपके विद्यार्थियों की मदद किस प्रकार करें।
- गणित की कक्षा में समूह कार्य का उपयोग करने के लिए कुछ सुझाव।
- गणितीय विचार और दैनिक जीवन के बीच संबंध को समझने में आपके विद्यार्थियों की मदद के लिए कुछ विचार।
- इस इकाई का संबंध NCF *(2005)* और *NCFTE (2009)* की दर्शाई गई शिक्षण आवश्यकताओं से है। स्त्रोत *1*।

1 औपचारिक भाग कलन विधि (Formal Division Algorithm)

नीचे दी गई औपचारिक भाग कलन विधि, भाग का बहुत ही स्पष्ट और औपचारिक रूप से वर्णन करती है:

> किसी भी सटीक सकारात्मक पूर्ण संख्या d (भाजक) और पूर्ण संख्या a में अद्वितीय पूर्ण संख्याएँ q (भागफल) और r (शेषफल) होती हैं
>
> $$a = qd + r$$
>
> और
>
> $$0 < r < d$$

एक धनात्मक पूर्ण संख्या जो कि 0 से बड़ी हो, वह एक सटीक सकारात्मक पूर्ण संख्या होती है।

दो स्थितियाँ $a = qd + r$ और $0 < r < d$ के अनुसार दिया गया भाग का वर्णन संक्रियात्मक है। इसका मतलब है कि ये दो स्थितियाँ परीक्षण का एक बहुत ही स्पष्ट तरीका बताती हैं, जिसमें पहली संख्या (a) दूसरी संख्या (d) से विभाजित होती है, जिसमें q भागफल और r एक शेषफल होता है।

हालाँकि, ये दोनों स्थितियाँ प्रक्रियात्मक नहीं हैं, जिसका मतलब है कि ये वास्तव में भागफल और शेषफल का पता लगाने के लिए कोई विधि प्रदान नहीं करती हैं (लेडी, 2000)। यह जानते हुए कि 45 किसी ऐसी संख्या के बराबर है जो छः से गुणा करने पर आती है, साथ ही कोई अन्य संख्या, आपको स्वयं वह कार्यविधियाँ नहीं बताती हैं जिससे आप उन संख्याओं का पता लगा सकें।

औपचारिक भाग कलन विधि मुख्यत: उन संख्याओं को ढूँढने का अध्ययन है जिसमें आपको संख्या a की सबसे निकटतम संख्या प्राप्त करने के लिए उसे भागफल से गुणा करना होता है। यह ध्यान देने वाली बात है, क्योंकि साझा करना किसी विद्यार्थी द्वारा भाग को समझने की एक उपयुक्त संकल्पना है (उदाहरण, अगर मैं 45 मिठाइयों को 6 बच्चों में बराबर-बराबर बाँट दूँ, तो उन्हें कितनी–कितनी मिठाइयाँ मिलेंगी? कितनी मिठाइयाँ बच गई है?), या समूहीकरण (उदाहरण, कुल 45 बच्चों की संख्या पूर्ण करने के लिए 6 बच्चों के कितने समूह होने चाहिए? कितनी मिठाइयाँ बच गई हैं?), उसके बाद उन्हें औपचारिक कलन विधि की समस्या हल करने की समझ आ जाएगी।

अपने विद्यार्थियों को प्रोत्साहित करना आवश्यक है ताकि वे भाग को गहराई से समझ पाएँ, और अगर वे इस सोच के पीछे के विचार के अर्थ को समझते हैं, तो उन्हें भाग कलन विधि और अच्छे से समझ आ जाएगी।

विचार कीजिए

इस बारे में सोचें कि आपने भाग को पहले कैसे पढ़ाया था। आप सामान्य रूप से भाग के बारे में कैसे बात करते हैं?

उदाहरण के लिए, अगर आपके किसी विद्यार्थी को 24 ÷ 6 हल करने में समस्या आ रही है, तो आपके दिमाग में पहली चीज़ क्या आती है? क्या ये गुणन का उलट है (‘छः की तालिका के बारे में सोचें – कितने छः मिलकर 24 बनते हैं?’), समूहीकरण (‘छः के कितने समूह मिलकर 24 बन सकते हैं?’) या कुछ और?

क्या आपने अपने विद्यार्थियों से इस बारे में बात की है कि भाग के बारे में इन विभिन्न सिद्धांतों में क्या समान और क्या अलग है? ये विभिन्न सिद्धांत आपके विद्यार्थियों को किस प्रकार भ्रमित कर सकते हैं?

2 यह देखने में सक्षम होना कि भाग में क्या हो रहा है

विद्यार्थियों के लिए भाग का सिद्धांत समझ पाना आंशिक रूप से कठिन हो सकता है, क्योंकि इसे समझने के कई सिद्धांत दिए गए हैं। जब आपको इस प्रकार की समस्या आए, जैसे कि '42 भाग 6', तो आप इसे ऐसे पढ़ सकते हैं:

- '42 में कितने 6 आते हैं?'
- '42 बनाने के लिए 6 के कितने समूह बन सकते हैं?'
- 'इनमें से कितने प्रत्येक छः समूहों में आ सकते हैं?'
- '42 का एक-छठा हिस्सा क्या होगा?'

हालाँकि, उत्तर हमेशा 7 होगा, लेकिन इस उत्तर तक पहुँचने के लिए कई अलग-अलग तरीके होंगे, जिससे कुछ विद्यार्थी भ्रमित हो सकते हैं।

विद्यार्थियों की यह समझने में मदद करना कि भाग के बारे में सोचने के एक से अधिक तरीके हैं और हर दिन बोली जाने वाली भाषा की संभावित अस्पष्टता के बारे में सचेत रहने से उनका गणितीय विकास होगा। विद्यार्थियों को विभाजन देने से संबंधित सभी कार्यों, जैसे कि '42 को 6 से विभाजित करें', का निर्देश देने वाली प्रत्येक समस्याओं के मतलब के बारे में बहुत ध्यानपूर्वक विचार करने की शिक्षा देना महत्वपूर्ण है।

यह कल्पना करने में सक्षम होना कि क्या हो रहा है, कलन विधि को समझने के लिए एक महत्वपूर्ण चरण है। निम्न गतिविधि में आप विद्यार्थियों से सरल ज्ञान का उपयोग करके भाग करने और भागफल तथा शेषफल ढूँढने के लिए कह सकते हैं। विद्यार्थियों द्वारा इस गतिविधि में समझी गई बातों के आधार पर आप आगे की गतिविधियाँ तैयार कर सकते हैं ताकि भाग कलन विधि के बारे में अधिक गहराई से समझा जा सके।

इस अंक में अपने विद्यार्थियों के साथ गतिविधियों के उपयोग का प्रयास करने से पहले अच्छा होगा कि आप सभी गतिविधियों को पूरी तरह या आंशिक रूप से स्वयं करके देखें। यह और भी बेहतर होगा यदि आप इसका प्रयास अपने किसी साथी शिक्षक के साथ करें क्योंकि जब आप अनुभव पर विचार करेंगे तो आपको मदद मिलेगी। स्वयं प्रयास करने से आपको किसी शिक्षा ग्रहण करने वाले व्यक्ति के अनुभव का ज्ञान होगा, जो आपके शिक्षण और एक शिक्षक के रूप में आपके अनुभवों को प्रभावित करेगा।

गतिविधि 1: लंबाइयों का बंटना (Deviding up lengths)

तैयारी

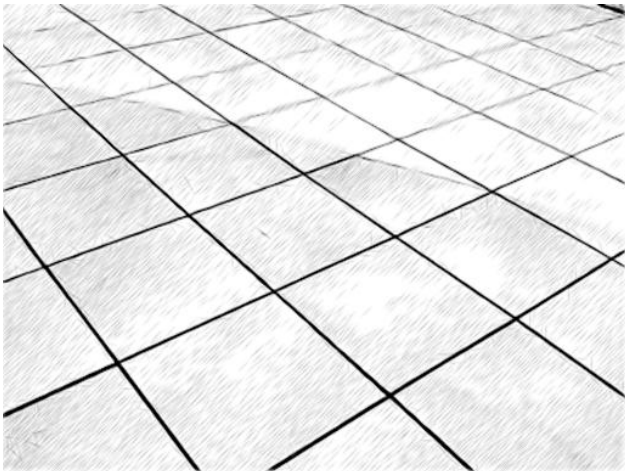
यह गतिविधि विद्यार्थियों की भाग की गणितीय समझ को चुनौती देने के लिए तैयार की गई है। अगर आपके विद्यार्थी की आयु कम है या भाग का कम अनुभव है, तो सरल संख्याओं का उपयोग करें – महत्वपूर्ण है उनके द्वारा मन में बनने वाला चित्र और उनकी सोच।

यह गतिविधि सर्वश्रेष्ठ ढंग से चार से छः विद्यार्थियों के समूहों में की जा सकती है। इस गतिविधि के लिए स्वयं को तैयार करने हेतु हो सकता है कि आप स्त्रोत 2, 'समूहकार्य का उपयोग करना' देखना चाहें।

गतिवधि

अपने विद्यार्थियों को निम्नलिखित बताएँ:

रजनी को अपने बेडरूम में नया सिरेमिक फ्लोर टाइलें लगवाना है (चित्र 1)। बेडरूम के फ्लोर की लंबाई 5,273 मिमी और चौड़ाई 4,023 मिमी है।



चित्र **1** रजनी के बेडरूम फ्लोर के लिए टाइलें।

उसने कैटलॉग देखा और टाइलों के दो डिज़ाइन छाँट लिए:

- पिंक स्पैरो
- रोज़वुड मैट।

पिंक स्पैरो की लंबाई 600 वर्ग मि.मी. है और रोज़वुड मैट की लंबाई वर्ग 450 मि.मी. है।

- रजनी के बेडरूम फ्लोर का आकार कैसा होगा?
- अपनी कॉपी में रजनी के बेडरूम फ्लोर का चित्र बनाएँ। आरंभ करने से पहले, इस बारे में सोचें: आप कॉपी में 5273 मि.मी. की लंबाई और 4023 मि.मी. की चौड़ाई वाला आयत नहीं बना सकते हैं। आप रजनी के बेडरूम फ्लोर को दर्शाने वाला एक आयत कैसे बनाएँगे? समूह में चर्चा करें।
- (शिक्षक के लिए नोट: अगर आपकी कक्षा के विद्यार्थी कम आयु के हैं या उन्होंने अभी तक मापन करना नहीं सीखा है, तो इस प्रश्न को छोड़कर अगला प्रश्न पूछें)। अब:
    - जितना सटीक हो सके उतना रजनी के बेडरूम फ्लोर का अलग अलग पैमाने का उपयोग करके तीन अलग–अलग आकार के चित्र बनाएँ। (अगर अलग–अलग पैमानों का उपयोग करने से गतिविधि बहुत कठिन हो रही है, तो केवल एक पैमाने का उपयोग करें।) चित्र के सामने उपयोग किए गए पैमाने को दर्ज करना याद रखें। तीनों चित्रों के बीच अंतर बताएँ।
    - प्रत्येक तीन चित्रों में, फ्लोर के चित्र को पिंक स्पैरो टाइलों और रोज़वुड मैट टाइलों से भर दें।
    - क्या अलग अलग आकारों वाले चित्र को भरने के लिए उपयोग की गई टाइलें समान हैं? क्यों?
- रजनी हर तरह की टाइल से फ्लोर को कवर करने के लिए टाइलों की कितनी पंक्तियों का उपयोग करेगी? क्या ये पंक्तियाँ संपूर्ण फ्लोर को कवर करेंगी? क्यों या क्यों नहीं?
- रजनी हर तरह की टाइल से फ्लोर को कवर करने के लिए टाइलों के कितने स्तंभ का उपयोग करेगी? क्या ये स्तंभ संपूर्ण फ्लोर को कवर करेंगे? क्यों या क्यों नहीं?

वीडियो: समूह में कार्य का उपयोग करना

केस स्टडी 1: श्रीमती अग्रवाल, गतिविधि 1 के उपयोग का अनुभव बताती हैं

यह एक अध्यापक की कहानी है जिसने अपने प्रांरम्भिक कक्षा के विद्यार्थियों के साथ गतिविधि 1 का प्रयास किया।

मैंने इस गतिविधि को एक कक्षा में आज़माया जिन्हें भाग के कलन विधि में समस्या हो रही थी। ऐसा लगा कि उस दौरान मानो उन्हें यह बात समझ नहीं आई, कि वाकई में इसका क्या मतलब था, जब वे दो मात्राओं को विभाजित कर रहे थे।

मैंने इस गतिविधि के लिए संख्याओं को कम करके तीन-अंकीय और दो-अंकीय संख्याएँ कर दी, ताकि वे अधिक आसानी से गणित कर सकें, क्योंकि मैं चाहता था कि वे जो कर रहे हैं, उसके बारे में विचार करें और उसकी कल्पना करें। मुझे लगा कि उनमें से कुछ को काग़ज़ पर रूप प्रस्तुत करते समय समस्या होगी, इसलिए मैंने उनके एटलस की मदद से उनके साथ कुछ अभ्यास किए, जिनमें मैंने पाया कि लंबी दूरियों को प्रस्तुत करने के लिए, पैमानों का उपयोग कैसे किया गया था। इसके बाद, जब मैंने वास्तव में ये गतिविधि की, तब उनमें से अधिकांश लोगों को इसका तरीका आ गया और वो तीन बेडरूम फ्लोर के चित्रों को आरेखित कर पाए।

अरूण ये जानना चाहता था कि 'तीन आकारों' से मेरा मतलब क्या था। मीता ने उसके प्रश्न का जवाब यह कहकर दिया कि हो सकता है कि हम अलग–अलग आकार के पैमानों का इस्तेमाल कर सकते थे। मैंने उनको वर्गाकार काग़ज़ के पत्रक दे दिए और वे सभी अपने आरेखण में व्यस्त हो गए। इसमें कुछ समय लग रहा था, इसलिए मैंने उन्हें एक समय सीमा प्रदान किया और कहा कि उन्हें अपने समूह में विभिन्न विद्यार्थियों को विभिन्न आकार आवंटित करने चाहिए।

जब उन लोगों ने बेडरूम के अपने आरेखण संपन्न कर लिए तो मैंने उनसे कहा कि क्या वे कॉपी बना सकते हैं ताकि इस समूह के प्रत्येक विद्यार्थी के पास टाइल लेआउट बनाने हेतु उपयोग करने के लिए एक कॉपी मौजूद रहे। फिर मैंने उन्हें फ्लोर को या तो पिंक स्पैरो टाइलों से या रोज़वुड मैट टाइलों से कवर करने के लिए कहा।

मुझे निम्न प्रश्न पूछना याद था: 'पैमाने भिन्न होने के बावजूद टाइलों की संख्या समान क्यों है?' पहली बार तो वे सुनिश्चित नहीं थे कि कैसे उत्तर दिया जाए लेकिन आखिरकार किसी ने कहा 'क्योंकि यह समान रूम है' और दूसरे ने कहा 'हमें इस पैमाने का उपयोग टाइलों के लिए भी करना पड़ा।' मैं इन उत्तरों से खुश थी, क्योंकि उन्हें जो कहा गया था उसे न केवल यांत्रिक तौर पर कर रहे थे बल्कि वे इस पर भी ध्यान दे रहे थे कि गणित का मतलब क्या होता है।

> उसके बाद हमने संपूर्ण कक्षा के साथ अंतिम दो प्रश्नों पर चर्चा की। वे इस समय 'क्यों?' प्रश्नों का उत्तर बहुत जल्दी-जल्दी दे रहे थे और मैं यह देख कर उनकी मदद करने में सक्षम था कि वे स्थान को विभाजित कर रहे थे और भाग की गतिविधि कर रहे थे, जिनके कारण उन्हें काफ़ी मदद मिली। उस शेष का यहाँ भी कुछ मतलब था – 'थोड़ा सा छूटा हुआ' जिसके लिए आपको किसी टाइल को भरने के लिए काटना होता, जो उनके लिए एक वास्तविक अवधारणा थी।

आपके शिक्षण अभ्यास के बारे में सोचना

अपनी कक्षा के साथ ऐसा कोई अभ्यास करने पर बाद यह सोचें कि क्या ठीक रहा और कहाँ गड़बड़ी हुई। ऐसे सवाल सोचें जो विद्यार्थियों की रुचि बढ़ाए और जिसमें वे आगे बढ़ने में सक्षम हों और जिनका स्पष्टीकरण करने की आवश्यकता हो। ऐसे चिंतन से वह 'चित्रण' मिल जाती है, जिसकी मदद से आप विद्यार्थियों के मन में गणित के प्रति रुचि जगा सकते हैं और उसे मनोरंजक बना सकते हैं। यदि विद्यार्थी कुछ भी समझ नहीं पाते हैं तथा कुछ भी नहीं कर पाते हैं, तो वे शामिल होना नहीं चाहेंगे। जब भी आप गतिविधियाँ करें, इस विचार करने वाले अभ्यास का उपयोग करें, जैसे श्रीमती कपूर ने कुछ छोटी–छोटी चीज़ें की जिनसे काफ़ी फर्क पड़ा।

विचार कीजिए

निम्न चिंतन को बढ़ावा देने वाले अच्छे प्रश्न हैं:

- आपकी कक्षा में इसका प्रदर्शन कैसा रहा?
- विद्यार्थियों से किस प्रकार की प्रतिक्रिया अनपेक्षित थी? क्यों?
- अपने विद्यार्थियों की समझ का पता लगाने के लिए आपने क्या सवाल किए?
- क्या किसी भी समय आपको ऐसा लगा कि हस्तक्षेप करना चाहिए?
- किन बिंदुओं पर आपको लगा कि आपको और समझाना होगा?
- आपके विद्यार्थियों को गणितीय अवधारणाओं की कितनी अच्छी समझ थी?
- क्या आपने कार्य में किसी भी तरीके का संशोधन किया? अगर हाँ, तो इसके पीछे आपका क्या कारण था?

3 संबंध स्थापित करना

यह पहली गतिविधि दर्शाती है कि रोज़मर्रा की गणनाओं के लिए भाग का कितना महत्व होता है और भाग कलन विधि का उस संदर्भ में उपयोग करके जिससे विद्यार्थी परिचित हों, उसे कैसे अधिक समझने योग्य बनाया जा सकता है। गणित में अधिकांश विषयों का महत्वपूर्ण भाग होता है। वास्तव में अनुपातिकता की बड़ी अवधारणा, जो कि भिन्नों और अनुपात को संयुक्त बनाती है, भाग के प्रति विद्यार्थियों की समझ पर निर्भर करती है।

उदाहरण के लिए किसी केक का अनुपातिक भाग वह हिस्सा होता है, जो प्रत्येक व्यक्ति को कम से कम एक भाग देता है, जिसे 'अनुपातिक हिस्सा' कहा जा सकता है। अगली गतिविधि उन विद्यार्थियों को भाग के प्रति अपने विचारों को विकसित करने में मदद करने के लिए, गतिविधि 1 के सन्दर्भ को विस्तृत करने के लिए प्रारंभ की जाती है।

गतिविधि 2: शेषफल का अर्थ

आप, अपने विद्यार्थियों को निम्न बताएँ।

एक बॉक्स में चार टाइलें हैं। रजनी को फ्लोर को कवर करने के लिए खरीदे जाने वाले आवश्यक टाइलों के बॉक्स की संख्या की गणना करनी होगी।

- अपके द्वारा गतिविधि 1 में आरेखित किए आरेख से उस आयत के कुल क्षेत्रफ़ल की गणना करें, जो उस फ्लोर को दर्शाता है। यह क्षेत्रफल वास्तविक बेडरूम के कुल क्षेत्रफल से कैसे संबंधित है?
- प्रत्येक प्रकार की एक टाइल से कवर किया गया क्षेत्रफल कितना है?
- अगर रजनी प्रत्येक प्रकार की टाइलों का एक बॉक्स खरीदती है, तो कुल क्षेत्रफल कितना होगा, जिसे कवर किया जा सकता है?
- रजनी को कुल कितने बॉक्स की आवश्यकता होगी?
- क्या रजनी अपने द्वारा खरीदी गई सभी टाइलों का पूरी तरह से उपयोग करने में सक्षम होगी? कितनी टाइलों का उपयोग नहीं किया जाएगा? क्या यह शेष टाइल के दोनों डिज़ाइनों, पिंक स्पैरो और रोज़वुड मैट के लिए समान रहेगा?

केस स्टडी 2: श्रीमती नागराजू गतिविधि 2 के उपयोग का अनुभव बताती हैं

इसे अगले दिन, गतिविधि 1 करने के बाद किया गया था। जब हमने गतिविधि 1 की तब मैंने उन विद्यार्थियों द्वारा बनाए गए आरेखों को एकत्रित किया ताकि उन विद्यार्थियों को उन्हें दोबारा आरेखित न करना पड़े। जिन आरेखों पर उन्होंने कल काम किया था, मैंने उन आरेखों को उन समूहों में वापस वितरित कर दिया। उसके बाद मैंने उनसे इस गतिविधि के प्रश्नों पर काम करने के लिए कहा।

मैंने उन समूहों को याद दिलाया कि उन्हें उन प्रश्नों का उत्तर देने के लिए तैयार रहना होगा, जिन्हें मैं ब्लैकबोर्ड पर लिखूंगी, इसलिए उनमें से सभी को इस बात की समझ होनी चाहिए कि वह समूह क्या कर रहा है और सभी गणनाओं को एक या दो विद्यार्थियों पर ही नहीं छोड़ना चाहिए और यह जानना अधिक महत्वपूर्ण है उन्होंने उन गणनाओं को क्यों किया, जो उनके पास मौजूद थीं।

बेशक, उन सभी ने कल से अपने आरेखों को सावधानी से (या उतनी सावधानी से नहीं) आरेखित किया है, जिनमें टाइलों के सभी लेआउट को दर्शाया गया है। अधिकांश समूहों ने इस संबंध में चर्चा प्रारंभ कर दी कि क्या उन्हें केवल उन टाइलों की गणना करनी चाहिए, जो उनके आरेखों पर आरेखित हैं। उनमें से कुछ ने गणना की और फिर भाग किया तथा दोनों ने अपने-अपने उत्तरों को सत्यापित किया, जिसमें यह दर्शाया गया कि उन लोगों ने वास्तव में इन संबंधों को समझना प्रारंभ कर दिया था। लेकिन सभी ने एक ही विधि से इसका प्रयास नहीं किया।

यह इस बारे में एक दिलचस्प चर्चा थी कि दोनों मामलों में शेष अलग-अलग कैसे था और ऐसा क्यों था। मुझे यह भी अच्छा लगा कि संपूर्ण-कक्षा की चर्चा के दौरान कैसे विद्यार्थियों ने ‘क्या शेष है’ को शब्द ‘शेष’ से कैसे लिंक किया और मैंने यह देखा कि कुछ सामूहिक चर्चाओं में उन लोगों ने वर्णन करने के लिए, ‘क्या छूट गया है’ और ‘छूटा हुआ’ जैसे शब्दों का भी उपयोग किया।

विचार कीजिए

- विद्यार्थियों से किस प्रकार की प्रतिक्रिया अनपेक्षित थी? ये जवाब आपको शेष के मतलब की आपकी समझ के बारे में क्या बताते हैं?
- किन बिंदुओं पर आपको लगा कि आपको और समझाना होगा?
- क्या आपने कार्य में किसी भी तरीके का संशोधन किया? अगर हाँ, तो इसके पीछे आपका क्या कारण था?

4 भाग कलन विधि की पुनरावृत्ति

अगली गतिविधि औपचारिक भाग कलन विधि पर वापस ले जाती है। विद्यार्थियों से यह पूछना निर्धारित किया गया है कि वे खुद से भाग कलन विधि को सूत्रबद्ध करना प्रारंभ करें।

गतिविधि 1 और 2 में विद्यार्थियों से यह कल्पना करने के लिए कहा गया है कि जब वे भाग का उपयोग करते हैं तो क्या होता है और शेष के बारे में चर्चा प्रारंभ करने के लिए भी कहा गया है। गतिविधि 3 इन विचारों को ऐसी गणितीय भाषा में औपचारिक बनाने की प्रक्रिया को शुरू करती है, जिसे गणितीय पाठ्यपुस्तकों में प्राप्त किया जा सकता है। यह गतिविधि उस प्रक्रिया (गतिविधि 4 में जारी रहती है) को भी प्रारंभ करती है, जिसमें विद्यार्थियों से गणितज्ञों की तरह ही गणित लिखने के लिए कहा जाता है।

गतिविधि 3: भाग कलन विधि (Division Algorithm)

अपने विद्यार्थियों को निम्नलिखित बताएँ:

अंततः रजनी अपने फ्लोर के लिए पिंक स्पैरो टाइलों का उपयोग करने का निर्णय लेती है।

- उस फ्लोर की लंबाई के साथ-साथ कितनी पूर्ण टाइलों का उपयोग किया जाएगा? इन टाइलों द्वारा कवर की गई कुल लंबाई कितनी है? लंबाई के साथ-साथ अधिकतम संख्या में टाइलों को रखने के बाद उस फर्श (फ्लोर) की वह लंबाई कितनी है, जो टाइलों द्वारा कवर नहीं हो पाती है?
- चलिए मान लेते हैं कि q = रूम की लंबाई के साथ-साथ उपयोग की गई पूर्ण टाइलों की संख्या।
- चलिए मान लेते हैं कि r = रूम की वह लंबाई, जो की लंबाई के साथ-साथ अधिकतम संख्या में टाइलों को रखने के बाद उन टाइलों द्वारा कवर नहीं हो पाती है।
- इनके बीच मौजूद संबंध को लिखें: रूम की लंबाई, एक टाइल की लंबाई, q और r।
- फ्लोर की चौड़ाई का उपयोग करते हुए, पहले चरण को दोहराएँ।

वीडियो: प्रगति एवं प्रदर्शन का आकलन करना

केस स्टडी 3: गतिविधि 3 के उपयोग का अनुभव श्रीमती अग्रवाल बताती हैं

इन विद्यार्थियों ने पहले दो गतिविधियाँ की हुई हैं, जिनमें उन्होंने यह देखा कि इन टाइलों को लंबाई के अनुसार उस फ्लोर को पूरी तरह से कवर किया जा सकता है, सिवाय एक छोटी सी जगह को छोड़कर, इसलिए वे यह बता सकते हैं कि इन टाइलों से कितनी लंबाई को कवर नहीं किया गया था।

मैंने उनसे कहा कि यह गतिविधि उनसे एक गणितज्ञ बनने के लिए कहने वाली है और भाग का उपयोग करते समय वे क्या कर रहे थे, यह दर्शाने के लिए चिह्नों का उपयोग करने के लिए कहने वाली है। इससे ऐसा लगा कि इससे उन्हें प्रोत्साहन मिला और उन लोगों ने इन विभिन्न मात्राओं के बीच चिह्नों द्वारा बहुत कम समय में, तुरंत संबंध लिखने के लिए अपने-अपने समूहों में कड़ी मेहनत की। मैंने कई विद्यार्थियों से ब्लैकबोर्ड के पास आने के लिए कहा और उस संबंध को वहाँ लिखने के लिए कहा, जिस पर उनके समूह ने निर्णय लिया था। उनके विचारों में कुछ मतभेद था, लेकिन कक्षा उस तरीके, गणितज्ञों के रूप में, पर तुरंत सहमत हो गई, जिस तरीके से उस परिस्थिति के लिए भाग कलन विधि को लिखना चाहिए था।

उनके द्वारा लंबाई के अनुसार संबंध पर काम कर लेने के बाद, मैंने उनसे चौड़ाई पर भी उसी तरीके से काम करने के लिए कहा और उन लोगों ने उस संबंध के साथ भी बहुत जल्दी से काम संपन्न करके दिखाया।

यह देख कर अच्छा लगा कि यहाँ तक कि वे विद्यार्थी भी इस संपूर्ण अभ्यास के दौरान अपना योगदान दे रहे थे जो आमतौर पर गणित की गतिविधियों में भाग नहीं लेते थे। मुझे लगता है कि अगर मैं बस उन्हें भाग कलन विधि के बारे में बताता, तो वे उसकी तुलना में जो बाते हो रही थीं, उनकी कल्पना करते हुए इस सन्दर्भ को और भी बेहतर तरीके से संबद्ध कर सकते थे। जब मैंने उनसे यह कहा कि उन्होंने जिस संबंध का पता लगाया था उसे भाग कलन विधि कहा जाता है, उन सभी को गणितज्ञों के रूप में गणित लिखने और इस प्रकार के एक औपचारिक उत्कृष्ट संबंध के साथ निष्कर्ष तक पहुँचने को उन सभी ने बहुत महत्वपूर्ण महसूस किया।

उसके बाद मैंने उनसे कहा कि वे पिछली गतिविधियों के अपने-अपने उत्तरों को सत्यापित करने के लिए इस भाग कलन विधि का उपयोग करें और वे सभी ऐसा कर पाए और मुझे लगता है कि वे सभी इस बात को समझने में सक्षम थे कि वास्तव में भाग का मतलब क्या है।

विचार कीजिए

श्रीमती अग्रवाल ने टिप्पणी दी कि यहाँ तक कि उन विद्यार्थियों ने भी योगदान दिया, जो गणित की गतिविधियों में भाग लेने में आमतौर पर दिलचस्पी नहीं दिखाते थे। यह बढ़िया है! भाग कलन विधि को वे समझ पाएँ यह निश्चित करने के लिए, उन्होंने किन-किन दृष्टिकोणों का उपयोग किया था या क्या उन्हें अपनी समझ को समेकित करने के लिए, अभी भी और अवसरों की आवश्यकता थी? इस पर विचार करने के बाद, हो सकता है कि आपको मुख्य स्त्रोत 'प्रगति और प्रदर्शन का मूल्यांकन करना' पर नज़र डालना उपयोगी लगे।

5 व्यापक स्तर पर काम करना

विद्यार्थियों को दैनिक-जीवन के स्तर पर काम करने के लिए कहना उनके आसपास की चीज़ों में भाग को देखने में उनकी मदद करने में उपयोगी हो सकता है। अगली गतिविधि जारी रहती है और विद्यार्थियों से भाग कलन विधि को पूरा करने और गणित की चिह्नात्मक भाषा का उपयोग करने के लिए कहती है, लेकिन इस बार वे बड़े पैमाने पर काम करेंगे।

किसी वास्तविक स्थिति के बारे में विचार करने और उनके द्वारा पता लगाई गई किसी समस्या के उत्तर की तैयारी करने से विद्यार्थियों को कल्पना की उनकी शक्ति को आगे विकसित करने में और चिह्नात्मक गणित के मतलब की कल्पना करने में मदद मिलेगी।

गतिविधि 4: दैनिक जीवन की परिस्थिति में भाग कलन विधि का उपयोग करना

भाग 1: स्कूल के मैदानों में

तैयारी

इस गतिविधि में विद्यार्थी अपने स्कूल के किसी विशेष भाग में टाइल वाले तल को तैयार करेंगे, उदाहरण के लिए, खेल के मैदान का कोई क्षेत्र।

विद्यार्थियों को स्कूल के मैदानों में काम पर ले जाते समय (चित्र 2) आपको हमेशा यह सुनिश्चित करना चाहिए कि आपके विद्यार्थी उन सुरक्षा जोखिमों से अवगत हैं, जिनसे उनका सामना हो सकता है। जैसे कि चलते वाहन या निर्माण कार्य और मौसम में होने वाले परिवर्तनों के लिए तैयार होना।

चित्र **2** किसी गतिविधि के लिए स्कूल के मैदान का उपयोग करना।

गतिवधि

कक्षा को दो या तीन विद्यार्थियों के समूहों में विभाजित करें। प्रत्येक समूह से निम्नलिखित करने के लिए कहें:

- स्कूल के कुछ भागों या हिस्सों का पता लगाएँ, जहाँ वे इन टाइलों को लगाना चाहते हैं। इस कार्य के लिए बाध्यता यह है कि उस हिस्से की आकृति एक आयताकार होनी चाहिए। वे सीढ़ियों या पायदानों, गलियारों, कमरों, खुली जगहों, फ्लोर या दीवारों, आदि को चुन सकते हैं।
- उस फ्लोर या दीवार की लंबाई L और चौड़ाई B को मापें, जहाँ वे टाइल लगाएँगे।
- उस वर्गाकार टाइल की लंबाई (l) चुनें, जिसे वे उस फ्लोर या दीवार पर लगाना चाहते हैं।
- चुनी गई टाइल के लिए, L और B दोनों के हेतु q और r (पिछली गतिविधि से संदर्भ लें) के मान की गणना करें।

एक बार इन्हें कर लेने के बाद**,** प्रत्येक समूह रिपोर्ट करने के लिए कक्षा में वापस आता है।

भाग 2: कक्षा में वापस

तैयारी

ब्लैकबोर्ड पर**,** तालिका **1** में दर्शाए गए अनुसार एक तालिका बनाएँ**,** जिसमें उतनी पंक्तियाँ जोड़ें**,** जितने समूह मौजूद हों।

तालिका 1 दैनिक जीवन की स्थिति में भाग कलन विधि का उपयोग करना।

	L	l	q	r	B	l	q	r
समूह **1**								
समूह **2**								
समूह **3**								
समूह **4**								
समूह **5**								
समूह **…**								

गतिवधि

उन समूहों से इस गतिविधि के भाग **1** से प्राप्त उनके निष्कर्षों के साथ उस ब्लैकबोर्ड पर दी गई तालिका में अपनी पंक्ति में भरने के लिए कहें। कक्षा के साथ निम्न की चर्चा करें**:**

- प्रत्येक समूह के विद्यार्थियों की अवलोकनों के बीच समानता क्या और भिन्नता क्या है?
- क्या आपमें से किसी को भी r का मान 0 प्राप्त हुआ? आपको क्या लगता है कि आपको यह मान क्यों प्राप्त हुआ?

- अगर आप यह सुनिश्चित करना चाहते हैं कि r = 0, तो आप l के मानों को कैसे बदलेंगे?
- अगर L और B दोनों के लिए, मान r = 0 है, तो L और B के बीच क्या संबंध है?
- भाग कलन विधि के साथ (L, l, q और r) के बीच का संबंध कैसे जुड़ा हुआ है?

केस स्टडी 4: गतिविधि 4 के उपयोग का अनुभव श्री चड्ढा बताती हैं

अब, यह विद्यार्थियों द्वारा भाग लेने के लिए एक बहुत ही दिलचस्प गतिविधि है। बेशक, मुझे माप लेने के लिए, उन्हें मापने वाला फीता देना होगा। उन सभी ने उनके द्वारा मापे जा सकने वाले विभिन्न प्रकार के क्षेत्रों पर तल बनाने में अच्छा समय बिताया और किन-किन जगहों पर टाइलें उपयुक्त रहेंगी, इस संबंध में चर्चा करने का आनंद उठाया।

कुछ समूह कुछ कठिन-आकृति वाले क्षेत्रों को मापने का प्रयास करने के बारे में चर्चा रहे थे, इसलिए मैंने उन्हें इसे आसान बनाने की सलाह दी। उनकी योजनाओं के तैयार हो जाने के बाद वे तुरंत चले गए, क्योंकि मैंने उनसे कहा कि अपने माप लेने के लिए और कक्षा में वापस आने के लिए उनके पास केवल दस मिनट हैं! मैं यह याद दिलाने के लिए कक्षा के बाहर अपनी घड़ी के साथ खड़ी हो गई, ताकि वे जो कर रहे थे उसे जल्दी-जल्दी करें।

उन सभी के कक्षा में वापस लौट आने के बाद, उन्हें यह तय करना था कि क्या बड़ी टाइलों का उपयोग करना है या छोटी टाइलों का; उनमें से कुछ ने बड़ी टाइलों को सबसे उपयुक्त माना लेकिन उसके बाद जब उन्होंने स्वयं जिस भाग के योग को निर्धारित किया था वो उन्हें पसंद नहीं आया तो उन लोगों ने छोटी टाइलों को चुन लिया। लगभग अगले पाँच मिनट के बाद उन सभी लोगों के पास उस तालिका के लिए अपने-अपने उत्तर मौजूद थे, जिसे मैंने ब्लैकबोर्ड पर आरेखित किया था।

यह चर्चा दिलचस्प थी कि क्या उनमें से किसी को भी **r = 0** प्राप्त हुआ और इस बात को भी लेकर काफ़ी चर्चा हुई कि वे लोग उसे कैसे और कब प्राप्त कर सकते हैं। इसके कारण गुण्यों और संख्याओं की भाज्यता के बारे में चर्चाएँ हुईं और जब हम ऐसा कह सकें कि कोई संख्या किसी दूसरी संख्या से पूरी तरह से विभाजित हो सकती है। हमने इस बारे में भी चर्चा की कि जब हम भाजक के किसी निश्चित गुणज को हटाते हैं, तो शेष के रूप में कोई भी संख्या कैसे बच सकती है और हम भाजक के गुणा की अधिकतम संख्याओं को कैसे हटाने का प्रयास करते हैं। इसमें इस बात पर विचार करना भी शामिल था कि कैसे शेष, भाजक से अधिक नहीं हो सकता।

मुझे लगता है कि इस गतिविधि की समाप्ति तक मैं यह कह सकती थी कि मेरे अधिकांश विद्यार्थी भाग कलन विधि को समझने में सक्षम हो गए थे और उन्हें उसका उपयोग करने के दौरान यह पता चल गया था कि वे जो कर रहे थे, वो क्यों कर रहे थे।

विचार कीजिए

- विद्यार्थियों से किस प्रकार की प्रतिक्रिया अनपेक्षित थी? यह भाग कलन विधि की उनकी समझ के बारे में क्या प्रकट करता है?
- अपने विद्यार्थियों की समझ का पता लगाने के लिए आपने क्या सवाल किए?
- क्या आपने कार्य में किसी भी तरीके का संशोधन किया? अगर हाँ, तो इसके पीछे आपका क्या कारण था?

6 सारांश

यह इकाई भाग कलन विधि, भाग के बारे में विद्यार्थियों को समझने में मदद करने के तरीकों और भाग संबंधी कलन विधि के कार्य करने के तरीकों पर केंद्रित है।

इस इकाई में आपको इस बारे में पता चल जाएगा कि अपने विद्यार्थियों को उन संदर्भों का उपयोग करने के लिए कैसे सक्षम बनाया जाए, जिसका वे संभवतः अपनी रोज़मर्रा की ज़िंदगी में अनुभव करेंगे, ताकि वे अपने द्वारा की जाने वाली चीज़ों की कल्पना करने में सक्षम हो जाएँ। इस तरीके से उनके अंदर भाग कलन विधि का क्या मतलब होता है, इसकी समझ विकसित होगी।

आप इन विचारों का उपयोग गणित की अन्य अवधारणाओं के लिए कर सकते हैं। विद्यार्थियों के लिए 'दैनिक-जीवन' की किसी समस्या को निर्धारित करने से वे जुड़ते हैं और उन्हें यह देखने में मदद मिलती है कि गणित, स्कूल के बाहर कैसे उपयोगी होता है। समूह में कार्य करने से सभी विद्यार्थी एक दूसरे का सहयोग करते हुए चर्चा कर पाते हैं और नए-नए विचार विकसित कर पाते हैं। उनकी गणित से जुड़ी समझ का विकास करने के लिए संवाद महत्वपूर्ण है।

इस इकाई से आपने यह समझ लिया होगा कि उनकी खुद की दुनिया से असंबंधित कलन विधि को उनके सामने प्रस्तुत करने की बजाय इस संबंध के निष्कर्ष तक उन्हें खुद से पहुँचने देकर, भाग कलन विधि के प्रत्येक भाग को समझने में विद्यार्थियों की मदद कैसे की जाए। आपने इस बात पर ध्यान दिया होगा कि विद्यार्थियों से अलग अलग तरीकों से भाग की अवधारणा पर नज़र डालने के लिए कहने से उन्हें महत्वपूर्ण संबंध स्थापित करने में मदद मिलती है।

आपने यह भी देखा होगा कि अपने विद्यार्थियों को सीखने में बेहतर सहायता करने में आपके शिक्षण को प्रतिबिंबित करना कितना महत्वपूर्ण है।

विचार कीजिए

इस इकाई में सीखी गई उन तीन तकनीकों अथवा पद्धतियों को पहचानें जिनका उपयोग आप अपनी कक्षाओं में फिर से कर सकते हैं।

स्त्रोत

स्त्रोत 1: एनसीएफ/एनसीएफटीई शिक्षण आवश्यकताएँ

यह यूनिट **NCF (2005)** तथा **NCFTE (2009)** की निम्न शिक्षण आवश्यकताओं से जोड़ता है तथा उन आवश्यकताओं को पूरा करने में आपकी मदद करेगा:

- शिक्षार्थियों को उनके शिक्षण में सक्रिय प्रतिभागी के रूप में देखें न कि सिर्फ़ ज्ञान प्राप्त करने वाले के रूप में; ज्ञान निर्माण के लिए उनकी क्षमताओं को कैसे प्रोत्साहित करें; रोट पद्धतियों से शिक्षण को दूर कैसे ले जाएँ।
- विद्यार्थियों को गणित को किसी ऐसी चीज़ के रूप में लेने दें जिसके बारे में वे बात करें, जिसके द्वारा संवाद करें, जिसकी आपस में चर्चा करें, जिस पर साथ मिलकर कार्य करें।

स्त्रोत 2: समूह में कार्य का उपयोग करना

समूहकार्य एक व्यवस्थित, सक्रिय, अध्यापन कार्यनीति है जो विद्यार्थियों के छोटे समूहों को एक आम लक्ष्य की प्राप्ति के लिए मिलकर काम करने के लिए प्रोत्साहित करती है। ये छोटे समूह संरचित गतिविधियों के माध्यम से अधिक सक्रिय और अधिक प्रभावी शिक्षण को प्रोत्साहित करते हैं।

समूहकार्य के लाभ

समूहकार्य विद्यार्थियों को सोचने, संवाद कायम करने, विचारों का आदान-प्रदान करने और निर्णय लेने के लिए प्रोत्साहित करके सीखने हेतु उन्हें प्रेरित करने का बहुत ही प्रभावी तरीका हो सकता है। आपके विद्यार्थी दूसरों को सिखा सकते हैं और उनसे सीख भी सकते हैं: यह शिक्षण का शक्तिशाली और सक्रिय स्वरूप है।

समूहकार्य में विद्यार्थियों का समूहों में बैठना ही काफी नहीं होता है; इसमें स्पष्ट उद्देश्य के साथ सीखने के साझा कार्य पर काम करना और उसमें योगदान करना शामिल होता है। आपको इस बात को लेकर स्पष्ट होना होगा कि आप पढ़ाई के लिए सामूहिक कार्य का उपयोग क्यों कर रहे हैं और जानना होगा कि यह भाषण देने, जोड़े में कार्य या विद्यार्थियों के स्वयं से कार्य करने पर तरजीह देने योग्य क्यों है। इस तरह समूहकार्य को सुनियोजित और उद्देश्यपूर्ण होना आवश्यक है।

समूहकार्य का नियोजन करना

आप समूहकार्य का उपयोग कब और कैसे करेंगे यह इस बात पर निर्भर करेगा कि पाठ के अंत में आप कौन सा शिक्षण पूरा करना चाहते हैं। आप समूहकार्य को पाठ के आरंभ में, अंत में या बीच में शामिल कर सकते हैं, लेकिन आपको पर्याप्त समय का प्रावधान करना होगा। आपको उस कार्य के बारे में जो आप अपने विद्यार्थियों से पूरा करवाना चाहते हैं और समूहों को नियोजित करने के सर्वोत्तम ढंग के बारे में सोचना होगा।

एक अध्यापक के रूप में, आप समूहकार्य की सफलता सुनिश्चित कर सकते हैं यदि आप निम्न की योजना अग्रिम रूप से बनाते हैं:

- सामूहिक गतिविधि के लक्ष्य और अपेक्षित परिणाम
- किसी भी फीडबैक या सारांश कार्य सहित, गतिविधि को आबंटित समय
- समूहों को कैसे विभाजित करना है (कितने समूह, प्रत्येक समूह में कितने विद्यार्थी, समूहों के लिए मापदंड)
- समूहों को कैसे नियोजित करना है (समूह के विभिन्न सदस्यों की भूमिका, आवश्यक समय, सामग्रियाँ, रिकार्ड करना और रिपोर्ट करना)
- कोई भी आकलन कैसे किया और रिकार्ड किया जाएगा (व्यक्तिगत आकलनों को सामूहिक आकलनों से अलग पहचानने का ध्यान रखें)
- समूहों की गतिविधियों पर आप कैसे निगरानी रखेंगे।
-

समूहकार्य के काम

वह काम जो आप अपने विद्यार्थियों को पूरा करने को कहते हैं वह इस पर निर्भर होता है कि आप उन्हें क्या सिखाना चाहते हैं। समूहकार्य में भाग लेकर, वे एक-दूसरे को सुनने, अपने विचारों को समझाने और आपसी सहयोग से काम करने जैसे कौशल सीखेंगे। तथापि, उनके लिए मुख्य लक्ष्य है जो विषय आप पढ़ा रहे हैं उसके बारे में कुछ सीखना। कार्यों के कुछ उदाहरणों में निम्नलिखित शामिल हो सकते हैं:

प्रस्तुतिकरण: विद्यार्थी समूहों में काम करके शेष कक्षा के लिए प्रस्तुतिकरण बनाते हैं। यह सबसे बढ़िया उपयोगी तब होता है जब प्रत्येक समूह के पास विषय का भिन्न पहलू होता है, जिससे वे एक ही विषय को कई बार सुनने की बजाय एक दूसरे को सुनने के लिए प्रेरित होते हैं। प्रत्येक समूह को प्रस्तुत करने के लिए दिए गए समय के विषय में काफी सख्ती बरतें और अच्छे प्रस्तुतिकरण के लिए मापदंडों का एक सेट निश्चित करें। इन्हें पाठ से पहले बोर्ड पर लिखें। विद्यार्थी मापदंडों का उपयोग अपने प्रस्तुतिकरण की योजना बनाने और एक दूसरे के काम का आकलन करने के लिए कर सकते हैं। इन मापदंडों में निम्नलिखित शामिल हो सकते हैं:

- क्या प्रस्तुतिकरण स्पष्ट था?
- क्या प्रस्तुतिकरण सुसंरचित था?
- क्या मैंने प्रस्तुतिकरण से कुछ सीखा?
- क्या प्रस्तुतिकरण ने मुझे सोचने पर मजबूर किया?
- समस्या को हल करना: विद्यार्थी किसी समस्या या समस्याओं की एक शृंखला को हल करने के लिए समूहों में काम करते हैं। इसमें शामिल हो सकता है, विज्ञान का कोई प्रयोग करना, गणित की समस्याएं हल करना, अंग्रेजी कहानी या कविता का विश्लेषण करना, या इतिहास के सबूत का विश्लेषण करना।
- कोई कलाकृति या उत्पाद बनाना: विद्यार्थी समूहों में काम करके किसी कहानी, नाटक के भाग, संगीत के अंश, किसी अवधारणा को समझाने के लिए मॉडल, किसी मुद्दे पर समाचार रिपोर्ट या जानकारी को सारांशित करने या अवधारणा को समझाने के लिए पोस्टर का विकास कर सकते हैं। समूहों को किसी नए विषय के आरंभ में मंथन करने या मस्तिष्क में रूपरेखा बनाने के लिए पाँच मिनट देने से आपको इस बारे में बहुत कुछ जानकारी मिलेगी कि उन्हें क्या पहले से पता है, और आपको पाठ को उपयुक्त स्तर पर स्थापित करने में सहायता मिलेगी।
- विभेदित कार्य: समूहकार्य विभिन्न उम्रों या दक्षता स्तरों के विद्यार्थियों को किसी उपयुक्त काम पर मिलकर काम करने देने का अवसर है। अधिक दक्षता प्राप्त करने वाले काम को समझाने के अवसर से लाभ उठा सकते हैं, जबकि कम दक्षता प्राप्त करने वालों के लिए समूह में प्रश्न पूछना अधिक आसान हो सकता है, और वे अपने सहपाठियों से सीखेंगे।
- चर्चा: विद्यार्थी किसी मुद्दे पर विचार करते हैं और एक निष्कर्ष पर पहुँचते हैं। इसके लिए आपको अपनी ओर से काफी तैयारी करनी होगी ताकि सुनिश्चित हो सके कि विभिन्न विकल्पों पर विचार करने के लिए विद्यार्थियों के पास पर्याप्त ज्ञान है, लेकिन चर्चा या विवाद का आयोजन आप और उन के लिए बहुत उपयोगी हो सकता है।

समूहों का नियोजन करना

चार से आठ के समूह आदर्श होते हैं किंतु यह आपकी कक्षा, भौतिक पर्यावरण और फर्नीचर, तथा आपकी कक्षा की दक्षता और उम्र के दायरे पर निर्भर करेगा। आदर्श रूप से समूह में हर एक के लिए एक दूसरे से मिलना, बिना चिल्लाए बात करना और समूह के परिणाम में योगदान करना आवश्यक होगा।

- तय करें कि आप विद्यार्थियों को समूहों में कैसे और क्यों विभाजित करेंगे; उदाहरण के लिए, आप समूहों को मित्रता, रुचि या समान अथवा मिश्रित दक्षता के अनुसार बाँट सकते हैं। भिन्न तरीकों से प्रयोग करें और समीक्षा करें कि प्रत्येक कक्षा के लिए क्या सर्वोत्तम है।
- योजना बनाएं कि आप समूह के सदस्यों को कौन सी भूमिकाएं देंगे (उदाहरण के लिए, नोट लेने वाला, प्रवक्ता, टाइम कीपर या उपकरणों का संग्रहकर्ता) और आप इसे कैसे स्पष्ट करेंगे।

समूहकार्य का प्रबंधन करना

आप अच्छे समूहकार्य के प्रबंधन के लिए दिनचर्याएं और नियम तय कर सकते हैं। जब आप नियमित रूप से समूहकार्य का उपयोग करते हैं, तो विद्यार्थियों को पता चल जाएगा कि आप क्या अपेक्षा करते हैं और वे इसे आनंददायक पाएंगे। टीमों और समूहों में काम करने के लाभों की पहचान करने के लिए आरंभ में कक्षा के साथ काम करना एक अच्छा विचार है। आपको चर्चा करनी चाहिए कि समूहकार्य में अच्छा व्यवहार क्या होता है और संभव हो तो 'नियमों' की एक सूची बनाएं जिसे प्रदर्शित किया जा सकता है; उदाहरण के लिए, 'एक दूसरे के लिए सम्मान', 'सुनना', 'एक दूसरे की सहायता करना', 'एक से अधिक विचार को आजमाना', आदि।

समूहकार्य के बारे में स्पष्ट मौखिक अनुदेश देना महत्वपूर्ण है जिसे ब्लैकबोर्ड पर संदर्भ के लिए लिखा भी जा सकता है। आपको:

- अपनी योजना के अनुसार अपने विद्यार्थियों को उन समूहों की ओर निर्देशित करना होगा जिनमें वे काम करेंगे। ऐसा आप शायद कक्षा में ऐसे स्थानों को चिन्हित करके कर सकते हैं जहाँ वे काम करेंगे या किसी फर्नीचर या स्कूल के बैगों को हटाने के बारे में अनुदेश देकर कर सकते हैं।

- कार्य के बारे में बहुत स्पष्ट होना और उसे बोर्ड पर लघु अनुदेशों या चित्रों के रूप में लिखना चाहिए। अपने शुरू करने से पहले विद्यार्थियों को प्रश्न पूछने की अनुमति प्रदान करें।

पाठ के दौरान, यह देखने और जाँच करने के लिए घूमें कि समूह किस तरह से काम कर रहे हैं। यदि वे कार्य से विचलित हो रहे हैं या अटक रहे हैं तो जहाँ जरूरत हो वहाँ सलाह प्रदान करें।

आप कार्य के दौरान समूहों को बदलना चाह सकते हैं। जब आप समूहकार्य के बारे में आत्मविश्वास महसूस करने लगें तब दो तकनीकें आजमाई जा सकती हैं – वे बड़ी कक्षा को प्रबंधित करते समय खास तौर पर उपयोगी होती हैं:

- **'विशेषज्ञ समूह':** प्रत्येक समूह को एक अलग कार्य दें, जैसे विद्युत उत्पन्न करने के एक तरीके पर शोध करना या किसी नाटक के लिए किरदार विकसित करना। एक उपयुक्त समय के बाद, समूहों को पुनर्गठित करें ताकि प्रत्येक नया समूह सभी मूल समूहों से एक 'विशेषज्ञ' से युक्त हो। फिर उन्हें एक कार्य दें जिसमें सभी विशेषज्ञों के ज्ञान को एकत्र करना होता है, जैसे निश्चय करना कि किस प्रकार का पॉवर स्टेशन बनाना या नाटक का अंश तैयार करना चाहिए।
- **'दूत':** यदि कार्य में कुछ बनाना या किसी समस्या को हल करना शामिल है, तो कुछ समय बाद, प्रत्येक समूह से किसी अन्य समूह में एक दूत भेजने को कहें। वे विचारों या समस्या के हलों की तुलना और फिर वापस अपने स्वयं के समूह को सूचित कर सकते हैं। इस प्रकार, समूह एक दूसरे से सीख सकते हैं।

कार्य के अंत में, जो कुछ सीखा गया है उसका सारांश बनाएं और आपको नज़र आई किसी भी गलतफहमी को सुधारें। आप चाहें तो प्रत्येक समूह का फीडबैक सुन सकते हैं, या केवल एक या दो समूहों से पूछ सकते हैं जिनके पास आपको लगता है कि कुछ अच्छे विचार हैं। विद्यार्थियों की रिपोर्ट करने की प्रक्रिया को संक्षिप्त रखें और उन्हें अन्य समूहों के काम पर फीडबैक देने को प्रोत्साहित करें जिसमें वे पहचान सकते हैं कि क्या अच्छा किया गया था, क्या बात दिलचस्प थी और किस बात को और विकसित किया जा सकता था।

यदि आप अपनी कक्षा में समूहकार्य को अपनाना चाहते हैं तो भी आपको कभी-कभी इसका नियोजन कठिन लग सकता है क्योंकि कुछ विद्यार्थी:

- सक्रिय शिक्षण का प्रतिरोध करते हैं और उसमें शामिल नहीं होते
- हावी होने वाली प्रकृति के होते हैं
- अंतर्व्यैयक्तिक कौशलों की कमी या आत्मविश्वास के अभाव के कारण भाग नहीं लेते।

सीखने के परिणाम कहाँ तक प्राप्त हुए और आपके विद्यार्थियों ने कितनी अच्छी तरह से अनुक्रिया की (क्या वे सभी लाभान्वित हुए) इस पर विचार करने के अलावा, समूहकार्य के प्रबंधन में प्रभावी बनने के लिए उपरोक्त सभी बिंदुओं पर विचार करना महत्वपूर्ण होता है। सामूहिक कार्य, स्त्रोतों, समयों या समूहों की रचना में आप द्वारा किए जा सकने वाले समायोजनों पर सावधानी से विचार करें और उनकी योजना बनाएं।

शोध से पता चला है कि विद्यार्थियों की उपलब्धि पर सकारात्मक प्रभाव पाने के लिए समूहों में सीखने का हर समय उपयोग करना आवश्यक नहीं है, इसलिए आपको हर पाठ में उसका उपयोग करने के लिए बाध्य महसूस नहीं करना चाहिए। आप चाहें तो समूहकार्य का उपयोग एक पूरक तकनीक के रूप में कर सकते हैं, उदाहरण के लिए विषय परिवर्तन के बीच अंतराल या कक्षा में चर्चा को अकस्मात शुरू करने के साधन के रूप में कर सकते हैं। इसका उपयोग विवाद का समाधान करने या कक्षा में अनेकों शिक्षण गतिविधियाँ और समस्या का हल करने के अभ्यास शुरू करने या विषयों की समीक्षा करने के लिए भी किया जा सकता है।

अतिरिक्त स्त्रोत

- 'The division algorithm' by E.L. Lady: http://www.math.hawaii.edu/~lee/courses/Division.pdf
- A newly developed maths portal by the Karnataka government: http://karnatakaeducation.org.in/KOER/en/index.php/Portal:Mathematics
- National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics: https://www.ncetm.org.uk/
- National STEM Centre: http://www.nationalstemcentre.org.uk/
- National Numeracy: http://www.nationalnumeracy.org.uk/home/index.html
- BBC Bitesize: http://www.bbc.co.uk/bitesize/
- Khan Academy's math section: https://www.khanacademy.org/math
- NRICH: http://nrich.maths.org/frontpage
- Art of Problem Solving's resources page: http://www.artofproblemsolving.com/Resources/index.php
- Teachnology: http://www.teach-nology.com/worksheets/math/

- Math Playground's logic games: http://www.mathplayground.com/logicgames.html
- Maths is Fun: http://www.mathsisfun.com/
- Coolmath4kids.com: http://www.coolmath4kids.com/
- National Council of Educational Research and Training's textbooks for teaching mathematics and for teacher training of mathematics: http://www.ncert.nic.in/ncerts/textbook/textbook.htm
- AMT-01 *Aspects of Teaching Primary School Mathematics*, Block 1 ('Aspects of Teaching Mathematics'), Block 2 ('Numbers (I)'), Block 3 ('Numbers (II)'): http://www.ignou4ublog.com/2013/06/ignou-amt-01-study-materialbooks.html
- LMT-01 *Learning Mathematics*, Block 1 ('Approaches to Learning') Block 2 ('Encouraging Learning in the Classroom'), Block 4 ('On Spatial Learning'), Block 6 ('Thinking Mathematically'): http://www.ignou4ublog.com/2013/06/ignou-lmt-01-study-materialbooks.html
- *Manual of Mathematics Teaching Aids for Primary Schools*, published by NCERT: http://www.arvindguptatoys.com/arvindgupta/pks-primarymanual.pdf
- *Learning Curve* and *At Right Angles*, periodicals about mathematics and its teaching: http://azimpremjifoundation.org/Foundation_Publications
- Textbooks developed by the Eklavya Foundation with activity-based teaching mathematics at the primary level: http://www.eklavya.in/pdfs/Catalouge/Eklavya_Catalogue_2012.pdf
- Central Board of Secondary Education's books and support material (also including *List of Hands-on Activities in Mathematics for Classes III to VIII*) – select 'CBSE publications', then 'Books and support material': http://cbse.nic.in/welcome.htm

संदर्भ/संदर्भग्रंथ सूची

Askew, M., Brown, M., Rhodes, V. Johnson, D. and Wiliam, D. (1997) Effective Teachers of Numeracy. London: King's College.

Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education: China Lectures. Dordrecht: Kluwer.

National Council for Teacher Education (2009) National Curriculum Framework for Teacher Education (online). New Delhi: NCTE. Available from: http://www.ncte-india.org/publicnotice/NCFTE_2010.pdf (accessed 6 March 2014).

National Council of Educational Research and Training (2005) National Curriculum Framework (NCF). New Delhi: NCERT.

Watson, A., Jones, K. and Pratt, D. (2013) Key Ideas in Teaching Mathematics. Oxford: Oxford University Press.

अभिस्वीकृतियाँ

तृतीय पक्षों की सामग्रियों और अन्यथा कथित को छोड़कर, यह सामग्री क्रिएटिव कॉमन्स एट्रिब्यूशन-शेयरएलाइक लाइसेंस **(http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/)** के अंतर्गत उपलब्ध कराई गई है। नीचे दी गई सामग्री मालिकाना हक की है तथा इस परियोजना के लिए लाइसेंस के अंतर्गत ही उपयोग की गई है, तथा इसका **Creative Commons** लाइसेंस से कोई वास्ता नहीं है। इसका अर्थ यह है कि इस सामग्री का उपयोग अननुकूलित रूप से केवल **TESS-India** परियोजना के भीतर किया जा सकता है और किसी भी बाद के **OER** संस्करणों में नहीं। इसमें **TESS-India, OU** और **UKAID** लोगो का उपयोग भी शामिल है।

इस यूनिट में सामग्री को पुनः प्रस्तुत करने की अनुमति के लिए निम्न स्त्रोत का कृतज्ञतापूर्ण आभार:

चित्र 2: क्लेयर ली (Figure 2: Clare Lee)

कॉपीराइट के स्वामियों से संपर्क करने का हर प्रयास किया गया है। यदि किसी को अनजाने में अनदेखा कर दिया गया है, तो पहला अवसर मिलते ही प्रकाशकों को आवश्यक व्यवस्थाएं करने में हर्ष होगा।

वीडियो (वीडियो स्टिल्स सहित): भारत भर के उन अध्यापक शिक्षकों, मुख्याध्यापकों, अध्यापकों और विद्यार्थियों के प्रति आभार प्रकट किया जाता है जिन्होंने उत्पादनों में दि ओपन यूनिवर्सिटी के साथ काम किया है।