म.प्र. राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
सा विद्या या विमुक्तये

शिक्षा का अधिकार
सर्व शिक्षा अभियान
सब पढ़ें सब बढ़ें
मध्य प्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल

TESS India

गणित
हाईस्कूल / हायर सेकेण्डरी

गणितीय लचीलेपन (Flexible) का निर्माण: त्रिभुजों में समरुपता और सर्वांगसमता

भारत में विद्यालय समर्थित
शिक्षक शिक्षा

www.TESS-India.edu.in

http://creativecommons.org/licenses/

The Open University

UKaid
from the British people

एस.आर.मोहन्ती
अपर मुख्य सचिव

अ.शा.पत्र क्र R.S.K/10
दूरभाष कार्यालय - 0755-4251330
मध्यप्रदेश शासन
स्कूल शिक्षा विभाग
मंत्रालय, वल्लभ भवन, भोपाल-462 004
भोपाल, दिनांक 20-1-2016

संदेश

प्रिय शिक्षक साथियों,

बच्चों की शिक्षा को गुणवत्तापूर्ण और रोचक बनाने के लिए स्कूल शिक्षा विभाग निरन्तर प्रयासरत् है। आप सभी के प्रयासों से शिक्षकों के शिक्षण कौशल में भी निखार आया है और शालाओं में कक्षा शिक्षण भी आंनददायी तथा बेहतर हुआ है।

इसी दिशा में शिक्षकों को बाल केन्द्रित शिक्षण की ओर उन्मुख करने और शिक्षक प्रशिक्षण की गुणवत्ता को बेहतर बनाने के उद्देश्यों को लेकर, TESS India द्वारा मुक्त शैक्षिक संसाधनों (Open Educational Resources) का विकास किया गया हैं। इनका उपयोग शिक्षण कार्य में सहजता व सुगमतापूर्वक किया जा सकता है। आशा है कि ये संसाधन, शिक्षकों एवं शिक्षक प्रशिक्षकों के व्यावसायिक उन्नयन और क्षमतावर्द्धन में लाभकारी और उपयोगी सिद्ध होंगे।

राज्य शिक्षा केन्द्र के संयुक्त तत्वाधान में TESS India द्वारा स्थानीय भाषा में तैयार किये गये मुक्त शैक्षिक संसाधनों (Open Educational Resources) को www.educationportal.mp.gov.in पर भी उपलब्ध कराया गया हैं। आशा है इन संसाधनों के उपयोग से प्रदेश के शिक्षक और शिक्षक प्रशिक्षक लाभान्वित होंगे और कक्षाओं में पठन पाठन को रूचिकर और गुणवत्तायुक्त बनाने में मदद मिलेगी।

शुभकामनाओं सहित,

(एस.आर.मोहन्ती)

दीप्ति गौड मुकर्जी
आयुक्त
राज्य शिक्षा केन्द्र एवं
सचिव
मध्यप्रदेश शासन
स्कूल शिक्षा विभाग

अर्द्ध शा. पत्र क्र. : 8
दिनांक : 12-1-16
पुस्तक भवन, वी-विंग
अरेरा हिल्स, भोपाल-462011
फोन : (का.) 2768392
फैक्स : (0755) 2552363
वेवसाइट : www.educationportal.mp.gov.in
ई-मेल : rskcommmp@nic.in

संदेश

प्रिय शिक्षक साथियों,

सभी बच्चों को रूचिकर और बाल केन्द्रित शिक्षा उपलब्ध हो इसके लिए आवश्यक है कि हमारे शिक्षकों को शिक्षण की नवीनतम तकनीकों और शिक्षण विधियों से परिचित कराया जाए साथ ही इन तकनीकों के उपयोग के लिए उन्हे प्रोत्साहित भी किया जाए। TESS India द्वारा तैयार किये गये मुक्त शैक्षिक संसाधनों (Open Educational Resources) के उपयोग से शिक्षक शिक्षण प्रविधि के व्यावहारिक उपयोग को सीख सकते हैं। इनकी सहायता से शिक्षक न केवल विषय वस्तु को सुगमता पूर्वक पढ़ा सकते हैं बल्कि पठन पाठन की इस प्रकिया में बच्चों की अधिक से अधिक सहभागिता भी सुनिश्चित कर सकते हैं।

राज्य शिक्षा केन्द्र स्कूल शिक्षा विभाग ने स्थानीय भाषा में तैयार किये गये इन मुक्त शैक्षिक संसाधनों (Open Educational Resources) को अपने पोर्टल www.educationportal.mp.gov.in पर भी उपलब्ध कराया है।

आशा हैं, कि आप इन संसाधनों का कक्षा शिक्षण के दौरान नियमित रूप से उपयोग करेंगे और अपने शिक्षण कौशल में वृद्धि करते हुए बच्चों की पढ़ाई को आनंददायक बनाने का प्रयास करेंगे।

शुभकामनाओं सहित,

(दीप्ति गौड़ मुकर्जी)

शिक्षा का अधिकार

सर्व शिक्षा अभियान
सब पढ़ें सब बढ़ें

टेस–इण्डिया स्थानीयकृत ओईआर निर्माण में सहयोग

मार्गदर्शन एवं समीक्षा :
श्रीमती स्वाति मीणा नायक, अपर मिशन संचालक, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
डॉ. एच. के. सेनापति, प्राचार्य, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
डॉ. ओ.पी.शर्मा, अपर संचालक, मध्यप्रदेश एससीईआरटी
डॉ. अशोक कुमार पारीक उपसंचालक, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
श्री आर. पी. त्रिपाठी, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
प्रो.जयदीप मंडल, विभागाध्यक्ष विज्ञान एवं गणित शिक्षा संकाय, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
डॉ. आर. रायजादा, सहप्राध्यापक एवं विभागाध्यक्ष विस्तार शिक्षा, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
डॉ. वी.जी. जाधव, से.नि. प्राध्यापक भौतिक, एनसीईआरटी
डॉ. के. बी. सुब्रमण्यम से.नि. प्राध्यापक गणित, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
डॉ. आई. पी. अग्रवाल से.नि. प्राध्यापक विज्ञान, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
डॉ. अश्विनी गर्ग सहा. प्राध्यापक गणित संकाय, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
डॉ. एल. के. तिवारी, सहप्राध्यापक विज्ञान, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
श्री एल.एस.चौहान, सहा. प्राध्यापक विज्ञान, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
डॉ. श्रुति त्रिपाठी, सहा. प्राध्यापक अंग्रेजी, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
डॉ. रजनी थपलियाल, व्याख्याता अंग्रेजी, ईएलटीआई, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
डॉ. मधु जैन, व्याख्याता शास. उच्च शिक्षा उत्कृष्टता संस्थान, भोपाल
डॉ. सुशोवन बनिक, सहा. प्राध्यापक क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
डॉ. सौरभ कुमार मिश्रा, सहा. प्राध्यापक क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
श्री. अजी थॉमस, सहा. प्राध्यापक क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
डॉ. राजीव कुमार जैन, सहा. प्राध्यापक क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल म.प्र.
स्थानीयकरण :
भाषा एवं साक्षरता
डॉ. लोकेश खरे, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
डॉ. एम.एल. उपाध्याय से.नि. व्याख्याता शास. उत्कृष्ट उ.मा.विद्यालय मुरैना
श्री रामगोपाल रायकवार ,कनि. व्याख्याता, डाइट कुण्डेश्वर, टीकमगढ़
डॉ. दीपक जैन अध्यापक, शास. उत्कृष्ट उ.मा.विद्यालय क्र 1 टीकमगढ़
अंग्रेजी
श्री राजेन्द्र कुमार पाण्डेय, प्राचार्य, ईएलटीआई, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
श्रीमती कमलेश शर्मा. डायरेक्टर , ईएलटीआई, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
श्री हेमंत शर्मा, प्राचार्य, ईएलटीआई, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
श्री मनोज कुमार गुहा वरि. व्याख्याता, एससीईआरटी. मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
डॉ. एफ.एस.खान, वरि.व्याख्याता, प्रगत शैक्षिक अध्ययन संस्थान (आईएएसई) भोपाल
श्री सुदीप दास, प्राचार्य, शास.उ.मा.विद्यालय दालौदा, मन्दसौर
श्रीमती संगीता सक्सेना, व्याख्याता, ,शास.कस्तूरबा कन्या उ.मा.विद्यालय भोपाल
गणित
श्री बी.बी. पी. गुप्ता, समन्वयक गणित, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
श्री ए. एच. खान प्राचार्य शास.उ.मा.विद्यालय रामाकोना, छिंदवाड़ा
डॉ. राजेन्द्र प्रसाद गुप्त , प्राचार्य शास. जीवाजी ऑब्जर्वेटरी उज्जैन
डॉ.आर,सी. उपाध्याय, वरि. व्याख्याता, डाइट, सतना
डॉ. सीमा जैन, व्याख्याता, शास. कन्या उ.मा.विद्यालय गोविन्दपुरा, भोपाल
श्री सुशील कुमार शर्मा, शिक्षक, शास. लक्ष्मी मंडी उ.मा.विद्यालय, अशोका गार्डन, भोपाल
विज्ञान
डॉ. अशोक कुमार पारीक उपसंचालक, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र भोपाल
डॉ. सुसम्मा जॉनसन, व्याख्याता एस.आई.एस.ई. जबलपुर मध्यप्रदेश
डॉ.सुबोध सक्सैना, समन्वयक एससीईआरटी मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र भोपाल
श्री आर. पी. त्रिपाठी, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
श्री अरूण भार्गव, वरि. व्याख्याता, एससीईआरटी, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र भोपाल
श्रीमती सुषमा भट्ट, वरि.व्याख्याता, एससीईआरटी, मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
श्री ब्रजेश सक्सेना, प्राचार्य, एससीईआरटी ,मध्यप्रदेश राज्य शिक्षा केन्द्र, भोपाल
डॉ. रेहाना सिद्दकी से.नि. व्याख्याता सेन्ट फ्रांसिस हा. से. स्कूल भोपाल

*TESS-India (*विद्यालय समर्थित शिक्षक शिक्षा*)* का उद्देश्य मुक्त शैक्षिक संसाधनों की सहायता से भारत में प्रारंभिक और सेकेण्डरी शिक्षको के कक्षा अभ्यास व कक्षा निष्पादन को सुधारना है जिसमें वे इन संसाधनों की सहायता से छात्र -केंद्रित, सहभागी दृष्टिकोणों का विकास कर सकें। टेस इंडिया के मुक्त शैक्षिक संसाधन शिक्षकों के लिए स्कूल पाठ्य पुस्तक के अतिरिक्त,सहयोगी पुस्तिका या संसाधन की तरह हैं। इसमें शिक्षकों के लिए कुछ गतिविधियां दी गई हैं जिन्हे वे कक्षाओ में विद्यार्थियों के साथ प्रयोग में ला सकते हैं, इसके साथ साथ कुछ केस स्टडी दी गई हैं जो यह बताती हैं कि कैसे अन्य शिक्षकों ने पाठ्य विषय को कक्षाओं में पढ़ाया और अपनी विषय संबंधी जानकारियों को बढ़ाने तथा पाठ योजनाओं को तैयार करने में संसाधनों का उपयोग किया।

TESS-India OER भारतीय पाठ्यक्रम और संदर्भों के अनुकूल भारतीय तथा अंतर्राष्ट्रीय लेखकों के सहयोग से तैयार किये गये है और ये ऑनलाइन तथा प्रिंट रूप में उपयोग के लिए उपलब्ध हैं *(http://www.tess-india.edu.in)*। *OER* कार्यक्रम से जुड़े प्रत्येक भारतीय राज्य के शिक्षकों के उपयोग के लिए उपयुक्त तथा कई संस्करणों में उपलब्ध हैं तथा शिक्षक व उपयोगकर्त्ता इन्हे अपनी स्थानीय आवश्यकताओं और संदर्भों के अनुरूप इनका स्थानीय करण करके उपयोग कर सकते हैं।

प्रस्तुत संस्करण मध्यप्रदेश की स्थानीय आवश्यकताओं और संदर्भों को ध्यान में रखकर तैयार किया गया है।

वीडियो संसाधन

इस इकाई में कुछ गतिविधियों के साथ यह आइकॉन (संकेत) दिया गया है*:* . इसका अर्थ है कि आप उक्त विशिट विषयवस्तु या शैक्षणिक प्रविधि को और अधिक समझने के लिए *TESS-India* के वीडियो संसाधनों की मदद ले सकते हैं।

TESS-India वीडियो ससांधन (Resources) भारतीय परिप्रेक्ष्य में कक्षाओं में उपयोग की जा सकने वाली सीखने–सिखाने की विविध तकनीकों को दर्शाते हैं। हमें यकीन है कि इनसे आपको इसी प्रकार की तकनीकें अपनी कक्षा में करने में मदद मिलेगी। यदि इन वीडियो संसाधनों तक आपकी पहुँच नहीं हो तो कोई बात नहीं। यह वीडियो पाठ्यपुस्तक का स्थान नहीं लेते, बल्कि उसको पढ़ाने में आपकी मदद करते हैं।

TESS-India के वीडियो संसाधनों को *TESS-India* की वेबसाइट *http://www.tess-india.edu.in/* पर ऑनलाइन देखा जा सकता है या डाउनलोड किया जा सकता है*)*। इसके अतिरिक्त आप इन वीडियो को सीडी या मेमोरी कार्ड में लेकर भी देख सकते हैं।

तृतीय पक्षों की सामग्रियों और अन्यथा कथित को छोड़कर, यह सामग्री क्रिएटिव कॉमन्स एट्रिब्यूशन–शेयरएलाइक लाइसेंस के अंतर्गत उपलब्ध कराई गई है: http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/

TESS-India is led by The Open University UK and funded by UK aid from the UK government

यह इकाई किस बारे में है

सभी शिक्षण में कुछ हद तक लचीलेपन की आवश्यकता होती है, और व्यापक रूप से इस बात को माना जाता है कि विद्यार्थियों को आजीवन सीखते रहने के लिए लचीलेपन की आवश्यकता होगी। गणित के लिए एक विशेष प्रकार के लचीलेपन की आवश्यकता प्रतीत होती है; आंशिक रूप से न केवल समाज द्वारा इसे देखे जाने के तरीक़े के कारण, बल्कि इसलिए भी कि कई लोगों को अक्सर गणित को प्रस्तुत किए जाने वाले तरीक़े की वजह से आने वाली कठिनाइयों को दूर करने के लिए दृढ़ता और मेहनत से प्रयास करते रहना पड़ता है। विद्यार्थियों को लचीला बनाने से वे गणित को बेहतर तरीक़े से सीखने में सक्षम हो सकते हैं, जो यह सुनिश्चित करता है कि वे उन योग्यताओं को पा सकें, जिनसे उन्हें जीवन में अधिक अवसर मिल सकते है।

गणित की जटिलता का एक अच्छा उदाहरण त्रिभुज की सर्वांगसमता और समरुपता में पाया जा सकता है, जिसे आप इस इकाई में पढ़ेंगे। संक्षेप में कहा जाए, तो ये बहुत ही सरल और सीधी अवधारणाएँ हैं। लेकिन किसी भी पाठ्यपुस्तक में देखें और उन गणितज्ञों की मौलिकता और सृजनात्मकता पर ध्यान दें, जिन्होंने सदियों से, इस तरह की सरल अवधारणाओं के लिए कई गणितीय विचारों को विकसित किया है।

इस इकाई की गतिविधियों के माध्यम से, आप विद्यार्थियों में गणित सीखने के लिए गणित के प्रति जिज्ञासा और गणितीय अवधारणाओं को समझने की क्षमता का विकास कर पाऐंगें तथा ऐसा करके उन्हें गणित के प्रति लचीला बनाने मैं मदद कर पाऐंगे। इससे आप उन्हें सफल होने के लिए पर्याप्त प्रयास और मेहनत करने के लिए छोड़ पाऐंगें।

इस इकाई से आप क्या सीख सकते हैं

- गणित सीखते समय विद्यार्थियों में लचीलेपन का निर्माण कैसे करें।
- आपके विद्यार्थियों को बेहतर तरीक़े से गणित सीखने में मदद के लिए कुछ सुझाव।
- गणित सीखते समय विद्यार्थियों को परेशानियों का पूर्वानुमान लगाने और उन पर क़ाबू पाने के लिए आकर्षित करने में सहायक कुछ विचार।

इस इकाई का संबंध संसाधन 1 में दर्शाई गई NCF (2005) और NCFTE (2009) शिक्षण आवश्यकताओं से है।

1 लचीलापन और सीखने में गणितीय लचीलापन

विचार कीजिए

भारतीय अध्ययन–सूची में त्रिभुज के साथ काम करना पाठ्यक्रम का एक महत्वपूर्ण हिस्सा है। आप इसे कक्षा 9वीं और कक्षा 10वीं के पाठ्यपुस्तकों में पा सकते हैं जहाँ त्रिभुज, सर्वांगसमता और समरुपता की व्याख्या शामिल की गई है। (मध्यप्रदेश की SCERT की पाठ्यपुस्तकों में, 9वीं कक्षा के लिए अध्याय 10 तथा 10वीं कक्षा के लिए अध्याय 6)

आपके विचार में उसे अक्सर क्यों पढ़ा जाता है? क्या आप पाठ्यक्रम में उस पर ज़ोर दिए जाने पर सहमत हैं?

लचीलापन समस्याओं और कठिनाइयों का सामना करने की वह क्षमता है;जिससे तब भी आगे बढ़ सकते है जब मार्ग कठिन हो। जीवन में अच्छी तरह काम करने के लिए हम सभी को कुछ हद तक लचीला होने की आवश्यकता है।

वर्तमान शैक्षिक अभ्यास और अनुसंधान शिक्षण में लचीला होने के महत्व और शैक्षणिक उपलब्धि तथा व्यावसायिक सफलता पर ध्यान केंद्रित करता है। आजीवन सीखना समाज में चलन बनता जा रहा है। लचीले शिक्षार्थियों का सीखने की दिशा में एक सकारात्मक रुख़ होगा और वे समस्याओं तथा कठिनाइयों के बावजूद अपनी शिक्षा जारी रखेंगे, जो घरेलू समस्याओं से लेकर, जैसे कि काम करने के लिए शांत जगह खोजने में असमर्थ होना या सीखने की ललक या चाह न होना या गणितीय सूत्रों का मतलब न समझना जैसी शिक्षण समस्याओं तक फैली हो सकती हैं।

गणितीय लचीलापन होना विशेष रूप से महत्वपूर्ण है। ली और जॉनस्टन–वाइल्डर (2013) गणितीय लचीलेपन को 'विद्यार्थी के गणित के प्रति वह रुख़, जो विद्यार्थियों को अपनी गणित सीखने में होने वाली कठिनाइयों और चुनौतियों के बावजूद भी शिक्षण जारी रखने में सक्षम बनाती है, के रूप में वर्णित करते हैं। वे तर्क देते हैं कि गणित सीखने के लिए विभिन्न कारकों की वजह से ' विद्यार्थियों को विशेष लचीलेपन की आवश्यकता है' जिनमें शामिल हैंः–

- अक्सर सम्मिलित शिक्षण प्रकार (Nardi and Steward, 2003)
- स्वयं गणित की प्रकृति (Mason, 1988)
- गणितीय क्षमता के 'स्थाई' होने के बारे में व्यापक मान्यताएँ (Dweck, 2000)

विचार कीजिए

वापस सोचे कि कब पिछली बार स्वयं आपने गणित पर काम किया था। क्या आप स्वयं को गणितीय तौर पर लचीले विद्यार्थी के रूप में वर्णित करेंगे? ऐसा क्यों है? आप अपने शिक्षण में ऐसा क्यों करते हैं जिसके कारण आप स्वयं को एक गणितीय रूप से लचीले विद्यार्थी या उसके रूप में विचार करते हैं?

अपनी कक्षा के कुछ विद्यार्थियों के बारे में सोचे और विचार करें कि वे किस प्रकार गणित सीखने की कोशिश करते हैं। किसी एक विशिष्ट विद्यार्थी के बारे में सोचे जिसे आप गणितीय रूप से लचीला मानते हैं, और एक जिसे लचीला (Flexible)नहीं मानते है। उनके शिक्षण व्यवहार में क्या समरूपता है और क्या अलग है?

2 गणितीय लचीलेपन के लिए शिक्षण

गणित सीखने के लिए 'विकासशील मानसिकता' विकसित करना

विद्यार्थी, जिन्होंने गणितीय समस्याओं पर काम करने के ऐसे तरीक़े विकसित किए हैं, जो उन्हें समस्या का सामना करने पर भी, सीखना जारी रखने देता है, गणितीय रूप से लचीला कहा जा सकता है। ऐसे विद्यार्थियों की 'विकासशील मानसिकता' होती है (Dweck, 2000), इसका मतलब है कि वे जानते हैं कि चुनौतियों का सामना करने के लिए जितना अधिक वे कार्य करते हैं और समस्याओं को हल करते हैं, वे उतने ही 'होशियार' बनेंगे। विकासशील मानसिकता वाले विद्यार्थी यह स्वीकार नहीं करते कि उनके सीखने की कोई उच्चतम सीमा या दायरा है। इसलिए, वे किसी अवधारणा को पूरी तरह समझने तक, ऐसे किसी भी व्यक्ति के साथ गणितीय अवधारणाओं के बारे में चर्चा और प्रश्न करेंगे जो उनकी मदद कर सकता है। इस लचीले ढंग से काम करने के लिए अवधारणाओं की व्याख्या करने और सहयोग से काम करने के लिए पर्याप्त गणितीय शब्दावली की ज़रूरत होगी।

प्रयोग करना और सवाल करना, गणितीय रूप से लचीलेपन का हिस्सा है। जो विद्यार्थी, उदाहरण के लिए, ICT उपकरणों या हाथ से बने उपकरणों का उपयोग करते हुए 'गणितीय अवधारणाओं को खेल के रुप में लेने के लिए प्रोत्साहित किए जाते हैं, वे अपना लचीलापन विकसित कर पाते हैं क्योंकि उन्हें लगता है कि वे उन अवधारणाओं का पता लगा सकते हैं और उन अवधारणाओं को समझने लगते हैं। लचीलापन विकसित करने का एक और महत्वपूर्ण तरीक़ा है सहयोगपूर्ण तरीक़े से काम करना, जहाँ विद्यार्थियों को जब भी ज़रूरत हो, वे अपने साथियों से मदद ले सकते हैं। एक लचीला विद्यार्थी विभिन्न स्त्रोतों से मदद प्राप्त करेगा जैसे सीनियर विद्यार्थी, पाठ्यपुस्तकें, इंटरनेट, शिक्षकगण, होशियार चाचा आदि।

विद्यार्थियों में लचीलापन विकसित करने एक और महत्वपूर्ण पहलू है, उन्हें यह महसूस कराना कि प्रश्न पूछना 'बुद्धिमानी' है और लगातार पूछना 'और भी समझदारी' है। सभी विद्यार्थियों को यह जानना चाहिए कि उनके सीखने की जिम्मेदारी केवल एक ले सकता है, जोकि वे स्वयं हैं, और इसलिए उन्हें सक्रिय रूप से समझने की कोशिश करनी चाहिए। गणितीय रूप से लचीले विद्यार्थी में स्वयं अपनी क्षमता की एक अच्छी समझ होती है और वे जानते हैं कि किसी भी हद तक सुधार करने के लिए उचित सहायता किस प्रकार प्राप्त की जा सकती है।

> संक्षेप में, गणितीय रूप से लचीले विद्यार्थी, अपने व्यवहार में, इस बात पर ज़ोर देंगे कि वे गणितीय रूप से पृथक न हों या गणितीय रूप से कमजोर न महसूस करें;यदि उनसे ऐसी उम्मीद की जाए कि वे निष्क्रिय या उदासीन होकर गणितीय अवधारणाओं को समझे तो वे उस उम्मीद का विरोध करेंगे लेकिन उनसे यह अपेक्षा की जाती है कि वे स्वयं समझते हुए उस पर काम करें। वे मौजूदा ज्ञान, कौशल, समझ और रणनीतियों का उपयोग करते हुए, अपने स्वयं की गणितीय सोच को विकसित करने के अपने अधिकार को पुनःप्राप्त करेंगे, और नए गणित को सीखने की अपनी क्षमता के बारे में आश्वस्त हो जाएँगे।
>
> (Lee and Johnston-Wilder, 2013)

गणितीय लचीलापन विकसित करने वाले तरीक़ों में कार्य करना

ली और जॉन्स्टन–वाइल्डर (2013) के अनुसार, गणितीय लचीलापन विकसित करने के लिए, विद्यार्थियों को निम्नानुसार करने का मौक़ा मिलना चाहिएः

- गणितीय संवादों में शामिल होने के लिए, पर्याप्त गणितीय शब्दावली और अभिव्यक्ति के तरीक़े जानें, अवधारणाओं पर सवाल पूछें, सहयोग से काम करें, गणितीय रूप से सोचे और समझ पैदा करें। इसका मतलब है कि विद्यार्थियों को न केवल अपने शिक्षकों द्वारा गणितीय भाषा के उपयोग को सुनना होगा, बल्कि स्वयं अपने लिए गणितीय शब्दों और अभिव्यक्ति के तरीक़ों का उपयोग करना होगा।
- गलतियाँ करें और ग़लत दिशा में मुड़ें, ताकि अंततः यह विश्वास विकसित करें कि यदि वे दृढ़ रहते हैं, तो उनके सफल होने की संभावना अधिक होगी।
- प्रयोग करने की अपनी क्षमता का विस्तार करें और एक गणितीय परिवेश में अवधारणाओं को हल करने की कोशिश करें तथा, हमारे अनुभव में, जानें कि उन्हें इसमें मज़ा आता है।

- महत्वपूर्ण समस्याओं का समाधान खोजें। इस तरह की समस्याओं पर काम करने के लिए विद्यार्थियों को उनके समाधान के लिए प्रयास करना होगा, स्वयं ग़लतियाँ करना और उन्हें पहचानना होगा तथा तर्कसंगत समाधान पाने के लिए अन्य लोगों के साथ विस्तारित समय तक काम करना होगा।
- गणित की दिशा में एक चिंतनशील और विचारशील रुख़ अपनाएँ। वे जान जाएँगे कि, यदि वे ज़्यादा सोचे, दूसरों के साथ बातचीत करें, गणितीय अवधारणाओं के बारे में पढ़ें और प्राप्त जानकारी पर मनन करें, तो वे लगने वाली अवधारणाओं और समस्याओ को भी हल करने में सक्षम हो सकते हैं।

इस इकाई में गतिविधियाँ इन पाँच लचीले कौशल को विकसित करने पर काम करेंगी।

3 गणितीय भाषा विकसित करना

गणितीय रूप से लचीला बनने के लिए विद्यार्थियों द्वारा जो उन्हें कठिन लग रहा है उस पर ध्यान देने और अपने सवाल, विचार और कल्पनाओं को अभिव्यक्त करने की आवश्यकता है। ऐसा करने में सक्षम होने के लिए, विद्यार्थियों को गणितीय शब्दावली पढ़ने, उसकी व्याख्या करने और उसे लागू करने के अवसर की आवश्यकता है। किसी भी भाषा को सीखने के समान ही, इसमें शब्दों और अभिव्यक्तियों को पहचानना, उन्हें अलग–अलग संदर्भों और वाक्यांशों में उपयोग करना, और शब्द तथा अभिव्यक्तियों को अर्थ देना शामिल है। प्रभावी रूप से किसी भाषा को सीखने के लिए आपको नियमित रूप से उसे सुनने, देखने, पढ़ने, लिखने और बोलने का अभ्यास करने की आवश्यकता है।

गतिविधि 1 अन्वेषण करती है कि गणितीय शब्दावली के साथ किस प्रकार व्यवहार करें। इसमें विद्यार्थियों को स्वयं अपने गणितीय शब्दकोश पर चिंतन करने, ऐसे गणितीय शब्दों और कथनों को पहचानने की ज़रूरत है जिनके लिए स्पष्टीकरण की आवश्यकता हो, स्वयं अपने स्पष्टीकरण लिखने और किसी अन्य विद्यार्थी के साथ इन पर बात करने की आवश्यकता है। ऐसा करने में वे स्वयं सीखते हैं कि गणित की भाषा का कैसे अर्थ लगाया जा सकता है, जो उन्हें गणित सीखते समय 'स्वतंत्र' रहने में मदद कर सकता है।

इस इकाई में सभी गतिविधियों का गणितीय संदर्भ त्रिभुज हैं, और विशेष रूप से, त्रिभुज में समरुपता और सर्वांगसमता। लेकिन, गतिविधियों में अपनाया गया दृष्टिकोण छात्र अध्ययन के सभी विषयों पर लागू किया जा सकता है।

गतिविधि 1 के भाग 3 में, विद्यार्थियों को भाग 1 और 2 में उनके शिक्षण पर भी विचार करने के लिए कहा गया है। यह इस इकाई की अधिकांश गतिविधियों में दोहराया गया है। इस का उद्देश्य विद्यार्थियों को सीखते समय इस बात के बारे में अधिक जागरूक रहना है कि उनके लिए क्या फायदेमंद होता है, और इसके परिणामस्वरूप हम अपने शिक्षण में अधिक सक्रिय बनना है।

इस इकाई में अपने विद्यार्थियों के साथ गतिविधियों के उपयोग का प्रयास करने के पहले अच्छा होगा कि आप सभी गतिविधियों को पूरी तरह (या आंशिक रूप से) स्वयं करके देखें। यह और भी बेहतर होगा यदि आप इसका प्रयास अपने किसी सहयोगी के साथ करें, क्योंकि जब आप अनुभव पर विचार करेंगे तो आपको मदद मिलेगी। स्वयं प्रयास करने से आपको विद्यार्थी के अनुभवों के भीतर झांकने का मौका मिलेगा, जो परोक्ष रूप से आपके शिक्षण और एक शिक्षक के रूप में आपके अनुभवों को प्रभावित करेगा। जब आप तैयार हों, तो अपने विद्यार्थियों के साथ गतिविधियों का उपयोग करें। पाठ के बाद, सोचें कि गतिविधि किस तरह हुई और उससे क्या सीख मिली। इससे आपको बाल–केंन्द्रित प्रभावी शैक्षिक वातावरण बनाने में मदद मिलेगी।

गतिविधि 1: स्वयं का गणितीय शब्दकोश बनाना
इस गतिविधि में विद्यार्थियों को अन्य विद्यार्थियों के साथ अपने विचारों का आदान–प्रदान करने की आवश्यकता है – वे और अधिक विचारों और प्रतिक्रियाओं को प्रेरित करने के लिए जोड़े या छोटे समूहों में काम कर सकते हैं। गतिविधि के लिए समय का ध्यान रखें, ताकि समय कम ना पड़े और सभी भागों पर ध्यान दिया जा सके; उदाहरण के लिए, मान लें 'मैं चाहती हूँ कि अगले दस मिनट में आप ज़्यादा से ज्यादा... ढूँढ़ें' आपको विद्यार्थी के शब्दकोश में कुछ प्रविष्टियों के उदाहरण मिल सकते हैं। संसाधन 2. भाग 1: शब्दकोश बनाना अपने विद्यार्थियों को निम्नलिखित बताएँ: त्रिभुज के बारे में अपनी पाठ्यपुस्तक में अध्यायों को देखें। • उपयोग किए जाने वाले ज्यामितीय शब्दों की एक सूची बनाए। • आपकी सूची में, क्या दैनिक जीवन में उपयोग किए जाने वाले कोई शब्द हैं? ज्यामितीय अर्थ और दैनिक जीवन् के अर्थ के बीच क्या समानता है और क्या अलग है? • ज्यामितीय शब्दों के लिए स्वयं अपनी व्याख्या लिखें। कोई स्केच या ड्राइंग जोड़ना भी सहायक हो सकता है।

भाग 2: गणितीय कथनों को अर्थपूर्ण बनाना

अपने विद्यार्थियों को निम्नलिखित बताएँ:

फिर, समूहों या जोड़ों में, त्रिभुज के बारे में अपनी पाठ्यपुस्तक के अध्यायों को देखें।

- कोई ऐसे गणितीय कथनों को लिख लें जो बार बार आपके सामने आते है,और जिन्हें समझने में विद्यार्थियों को परेशानी हो सकती है। उदाहरण के लिए: 'दो त्रिभुज सर्वांगसम हैं यदि उसकी दो भुजाएँ और उनके बीच का कोण,दूसरे त्रिभुज की दो भुजाऐं और उनके बीच के कोण बराबर है (SAS सर्वांगसमता नियम)'।
- कथन के संदर्भ में आपको समझ में न आने वाले शब्दों को पहचानें। उपर्युक्त उदाहरण में, यह 'सम्मिलित' शब्द हो सकता है, जिसे आप दैनिक जीवन की भाषा में समझ गए होंगे, लेकिन जिसे गणितीय कथन में समझाना मुश्किल लग सकता है।
- इन शब्दों के अर्थ पर चर्चा करें और उन्हें लिख लें। यथासंभव स्पष्ट और सटीक रहने का प्रयास करें।

गतिविधि के इस भाग के लिए विद्यार्थियों को ढूँढ़ने के लिए कहने के बजाय कुछ उदाहरण तैयार रखना उपयोगी हो सकता है। आप उस पाठ से उन्हें निकाल सकते हैं, जिसे वे पढ़ रहे हैं। इससे समय की बचत होगी, क्योंकि उन्हें उदाहरण ढूढ़ने की ज़रूरत नहीं होगी।

भाग 3: अपने शिक्षण पर विचार करना

अपने विद्यार्थियों को निम्नलिखित बताएँ:

गतिविधि का यह भाग चाहता है कि आप अपने शिक्षण के बारे में सोचे, ताकि आप गणित सीखने में बेहतर बन सकें और अधिक सहज महसूस कर सकें।

- इस गतिविधि के भाग 1 के बारे में आपको क्या आसान या मुश्किल लगा?
- इस गतिविधि के बारे में आपको क्या पसंद आया?
- इस गतिविधि से आपने क्या गणित सीखा?
- आपने क्या सीखा कि गणित को आपने कैसे सीखा (सीख सकते हैं)?

वीडियो: स्थानीय संसाधनों का उपयोग करते हुए

वीडियो: समूह **में** कार्य का उपयोग करना

आप मुख्य संसाधन 'स्थानीय संसाधनों का उपयोग' और 'समूह में कार्य का उपयोग' भी देखना चाह सकते हैं।

केस–स्टडी 1: श्री अग्रवाल गतिविधि 1 के उपयोग का अनुभव बताते हैं

यह एक शिक्षक की कहानी है, जिसने अपने हाई स्कूल कक्षा के विद्यार्थियों के साथ गतिविधि 1 का प्रयास किया। वे एक अंग्रेज़ी माध्यम के स्कूल में पढ़ाते हैं।

विद्यार्थी इस गतिविधि को शुरू करते हुए बेहद खुश थे; उन्होंने अपनी पुस्तकें खोलीं और उन्होंने ऐसे शब्दों को ढूँढ़ना शुरू किया, जो उन्हें लगा कि उनके लिए नए हैं या ज्यामिति के लिए विशिष्ट हैं।

जब मैं कक्षा में चारों ओर चहलक़दमी कर रहा था, तो मैंने नोटिस किया कि उन्होंने कुछ शब्दों के अर्थ एक दूसरे से पूछ कर या पाठ्यपुस्तक में व्याख्या पढ़ कर जान लिया, और उनके आगे ख़ाली जगह छोड़ दी, जिन्हें वे नहीं जानते थे। शब्दों के अर्थ एक दूसरे से पूछते समय दरअसल विद्यार्थी बहुत शोर मचा रहे थे। शायद अगली बार मैं कहूँगा कि उन्हें केवल अपने बग़ल में बैठे विद्यार्थी से पूछने

की अनुमति है, आगे या पीछे वालों से नहीं। दूसरी बात यह कि शोर गणितीय चर्चा थी और अधिक लोगों से पूछने पर वे अधिक जानकारी पाने में सक्षम हुए।

थोड़ी देर के बाद, मैंने उन्हें याद दिलाया कि उन्हें गतिविधि के अन्य प्रश्नों को भी हल करना है, जो कि उन्हें अपने शब्दों में लिखने का प्रयास करना, चित्र बनाना और फिर यह सोचना और लिखना था कि क्या उन्होंने उस शब्द को गणित के अलावा किसी और संदर्भ में देखा था, और उस संदर्भ में उसका क्या मतलब होगा। विद्यार्थियों को अर्थ के हिसाब से अंतिम प्रश्न कठिन लगाः उनके द्वारा अंग्रेज़ी भाषा का प्रयोग व्यापक नहीं है और मैंने शब्दकोश में अर्थ ढूँढ़ने के लिए उन्हें प्रोत्साहित किया, ताकि वे देख सकें कि दैनिक जीवन से जुड़े गणितीय शब्द से कितने निकट का संबध रखते हैं, या नहीं रखते हैं। कुछ विद्यार्थियों के लिए मुझे शब्दों का हिन्दी में अनुवाद करना पड़ा।

यह विद्यार्थियों और मेरे लिए अत्यंत लाभकारी अभ्यास थाः विद्यार्थियों को लिखने, पढ़ने और अभिव्यक्त करने से संबंधित गणित के भाषा पहलू पर वास्तव में काम करने का मौक़ा मिला। मुझे, उसने एहसास कराया कि गणित में प्रयुक्त भाषा किस हद तक विद्यार्थियों के लिए अपरिचित है और गणितीय अवधारणाओं को सीखने में उनके लिए बाधक है। मैं वाक़ई भविष्य में गणित के भाषा शिक्षण पर अधिक समय और ध्यान खर्च करना चाहता हूँ – यदि शब्दों का उनके लिए कोई अर्थ नहीं है, तो वे उनके बारे में कैसे सीख सकते हैं? उदाहरण के लिए, मैंने एक गणितीय अंग्रेज़ी–हिन्दी शब्दकोश संकलित करना शुरू कर दिया है, जो हमें कक्षा में उपलब्ध रहेगा।

अपने शिक्षण अभ्यास में दिखाना

जब आप अपनी कक्षा के साथ ऐसी कोई गतिविधि करें, तो बाद में सोचे कि क्या ठीक रहा और कहाँ गड़बड़ हुई। ऐसे प्रश्नों की ओर ध्यान दें जिनमें विद्यार्थियों ने दिलचस्पी दिखाई और जिन्हें वे समझने में समर्थ थे, और जिनके लिए आपको स्पष्टीकरण देने की आवश्यकता हुई। ऐसी बातें ऐसी 'स्क्रिप्ट' पता करने में सहायक होती हैं, जिससे आप विद्यार्थियों में गणित के प्रति रुचि जगा सकें और उसे मनोरंजक बना सकें। यदि वे कुछ भी समझ नहीं पाते हैं तथा कुछ भी नहीं कर पाते हैं, तो वे शामिल होने में कम रुचि लेंगे। जब भी आप गतिविधियां करें, इस चिं**तन के** अभ्यास का उपयोग करें, इस बात पर ध्यान देते हुए, जैसे श्रीमती कपूर ने किया था, कि कुछ छोटी–छोटी चीज़ों से काफी फर्क पड़ा।

विचार कीजिए

ऐसे चिंतन को बढ़ाने वाले अच्छे सवाल हैंः

- आपकी कक्षा कैसी रही?
- विद्यार्थियों से किस प्रकार की प्रतिक्रिया अनपेक्षित थी? क्यों?
- अपने विद्यार्थियों की समझ का पता लगाने के लिए आपने क्या सवाल किए?
- क्या आपको लगा कि आपको किसी समय हस्तक्षेप करना होगा?
- किन बिंदुओं पर आपको लगा कि आपको और समझाना होगा?
- क्या आपने किसी भी रूप में काम को संशोधित किया? यदि ऐसा है, तो आपने ऐसा किस कारण से किया?

4 ग़लत धारणाओं और ग़लतियों के साथ व्यवहार

जब आप साइकिल की सवारी करना सीखते हैं तो आपको संतुलन बनाना भी सीखना पड़ता है। यह स्वीकार किया जाता है कि साइकिल चलाना सीखने की प्रक्रिया में आप एक–दो बार गिरेंगे, ग़लत दिशा में मुडेंगे, तेज़ी से हैंडलबार को खींचेंगे, भूल जाएँगे कि ब्रेक्स कहाँ हैं, इस बारे में गल्तियाँ करेंगें। केवल इस प्रकार की ग़लतियाँ करके ही आप साइकिल चलाने के कौशल को विकसित करेंगे और उसमें सुधार करेंगे। ग़लतियाँ करना और अपनी ग़लत धारणाओं के साथ सामना होने पर आप भविष्य में बेहतर जान सकते हैं।

गणित सीखना किसी बाइक या अन्य किसी वाहन की सवारी सीखने से अलग नहीं है। ग़लतियाँ करना उस प्रक्रिया का हिस्सा है, और वास्तव में एक अच्छी बात है, क्योंकि यह परम्परागत सोच के पैटर्न के साथ हस्तक्षेप करता है और आप जो कर रहे हैं, उस पर आपको सोचने पर मजबूर करता है। यदि कोई कक्षा लोकाचार हो कि ग़लतियाँ करके सीखा जा सकता है, और इसलिए ग़लतियाँ करना प्रभावी शिक्षण का एक हिस्सा है, तो फिर छात्र भी अधिक इच्छुक हो जाएँगे और प्रयोग करने में अधिक समर्थ तथा ग़लतियाँ करने से कम डरते हुए नई अवधारणाओं को आज़माने का प्रयास करेंगे, और परिणामस्वरूप गणित को जानने–बूझने तथा उसका मज़ा लेने के लिए बेहतर रूप से सुसज्जित हो जाएँगे।

इस प्रकार के कक्षा लोकाचार की स्थापना करना, जहाँ विद्यार्थी अपनी ग़लतियों और ग़लत धारणाओं को साझा करने के लिए तैयार हो जाएँ, रातों–रात नहीं हो जाता – इसके लिए पोषण और सावधानी से सिखाने की ज़रूरत होती है। लेकिन, इस लोकाचार को बढ़ावा देने के लिए ऐसे तरीक़े हैं, जिनका आप उपयोग कर सकते हैंः

- संभाव्य ग़लत धारणाओं को सामने लाने के लिए काल्पनिक विद्यार्थियों का उपयोग करें। क्योंकि यह उनका स्वयं का काम नहीं है, जिसके बारे में बात की जा रही है, इससे उनमें भावनात्मक प्रतिक्रियाएँ या शर्मिंदगी की भावनाएँ नहीं होंगी।
- किसी उत्तर को सिर्फ़ 'ग़लत' होने के कारण छोड़ देने के बजाय ग़लतियों और ग़लत धारणाओं पर विचार करने के लिए प्रोत्साहित करें – यह सीखने के लिए एक उपयोगी तरीक़ा प्रदान करता है।
- विचारों के आदान–प्रदान को बढ़ावा दें, भले ही वे आधे–अधूरे या 'ग़लत' क्यों न हों।

दूसरी गतिविधि अभिकल्पित की गई है, जिसमें बहुत संभावना है कि विद्यार्थी ग़लतियाँ करें। गलतियों पर स्पष्ट रूप से चर्चा करने से ग़लत धारणाओं को प्रकाश में लाने और इन्हें गणित सीखने के तरीके बदलने में मदद मिलेगी।

गतिविधि 2: त्रिभुजों की चुनौती – ग़लत धारणाओं और ग़लतियों से सीखना

भाग 1: खेल मे त्रिभुजीय चुनौतियां

अपनी कक्षा को तीन–तीन विद्यार्थियों के समूहों में विभाजित करें।

अपने विद्यार्थियों को निम्नलिखित स्पष्ट करें:

- प्रत्येक समूह में एक विद्यार्थी जो लीडर है उसे अन्य दो विद्यार्थियों को त्रिभुज दिखाए बिना, एक त्रिभुज बनाना होगा। एक समय में एक तथ्य के साथ, लीडर अपने त्रिभुज का वर्णन करेंगे। अन्य दो विद्यार्थियों में से प्रत्येक को लीडर द्वारा दिए गए तथ्यों से वही त्रिभुज बनाना होगा। उन्हें सही माप और आकार पाने पर ध्यान केंद्रित करना होगा।
- यदि दो विद्यार्थी उनके साथ साझा किए गए तथ्यों का उपयोग करते हुए अपने त्रिभुज नहीं बना पा रहे हों, तो उन्हें 'हमें और जानकारी की जरुरत है' कहना होगा। उसके बाद लीडर अपने त्रिभुज के बारे में एक और तथ्य बताएगा। दोनों विद्यार्थियों द्वारा अपने त्रिभुज तैयार करने के बाद, यदि उनके त्रिभुज एक जैसे है तो लीडर उन्हे एक अंक देंगे अन्यथा उन्हें कोई अंक नहीं मिलेगा। मूल त्रिभुज और अंक पाने वाले त्रिभुजों को कक्षा में त्रिभुजों के एक ढेर में रखा जाएगा। अन्य त्रिभुज अलग कर दिए जाएँगे।
- समूह इस गतिविधि को और दो बार दोहराता है, जहाँ अन्य विद्यार्थी बारी–बारी से लीडर बनेंगे।

जब वे उपर्युक्त गतिविधि पूरी कर लें, तब विद्यार्थियों से निम्नलिखित प्रश्न पूछें:

- कौन–सा त्रिभुज बनाने में आसान था? क्यों?
- आप में से कुछ सर्वांगसम त्रिभुज क्यों नहीं बना पाए जब कि दूसरे ऐसा कर सके? क्या ग़लतियाँ हुईं और क्यों?

भाग 2: चुनौती जारी रखना

अपने विद्यार्थियों को समझाएँ कि भाग 1 में तैयार किए गए त्रिभुजों के विशेष ढेर पर अब ध्यान केंद्रित करना होगा। तीन विद्यार्थियों का प्रत्येक समूह ढेर से एक त्रिभुज एकत्रित करेगा। एक वालंटियर विद्यार्थी ढेर से यादृच्छिक रूप से बाक़ी त्रिभुजों में से एक उठाएगा और फिर कक्षा को एक–एक करके उसके तथ्यों का वर्णन करेगा। विद्यार्थी यह निर्धारित करने के लिए अपने समूहों में अपने त्रिभुजों की जाँच करेंगे कि उनके पास 'सटीक रूप से मेल खाने वाला' है या 'उससे मिलता जुलता वाला' है। फिर, सटीक रूप से मेल खाने वाले को एक अंक दिया जाएगा।

शेष सभी त्रिभुजों का उपयोग संपन्न होने तक इस अभ्यास को दोहराएँ।

प्रत्येक दौर के बाद, निम्नलिखित प्रश्नों का उत्तर दें:

- कितने तथ्यों के बाद मेल खाने वाला मिला?
- क्या आपको कम तथ्यों के साथ मेल खाने वाला मिल सकता था?
- आपको 'सटीक' रूप से मेल खाने वाला मिला या 'उसके समान' मेल खाने वाला मिला?
- आपके विचार में ऐसा क्यों है?

भाग 3: अपने शिक्षण पर विचार करना

गतिविधि के इस भाग में विद्यार्थियों को अपनी सीख पर विचार करने को कहा जाएगा, ताकि वे बेहतर बन सकें और गणित सीखने के प्रति सहज महसूस कर सकें। अपने विद्यार्थियों से निम्नलिखित प्रश्न पूछें।

- इस गतिविधि के भाग 1 के बारे में आपको क्या आसान या मुश्किल लगा?
- इस गतिविधि के बारे में आपको क्या पसंद आया?
- इससे आपने क्या गणित सीखा?

- आपने क्या सीखा कि गणित को आपने कैसे सीखा (सीख सकते हैं)?

केस–स्टडी 2: श्रीमती शर्मा गतिविधि 2 के उपयोग का अनुभव बताती हैं

मैंने अपने उत्तर लिखने के लिए समूहों को काग़ज़ के टुकड़े वितरित किए। उसके बाद मैंने उन्हें गतिविधि के बारे में विस्तार से समझाया। मैंने उनसे त्रिभुज बनाने के लिए लीडर द्वारा प्रयुक्त तथ्यों को भी लिख लेने के लिए कहते हुए गतिविधि में थोड़ा संशोधन किया और उनसे कहा कि इससे उन्हें यह जानने में मदद मिलेगी कि वे क्यों त्रिभुज बना पाए और ठीक कितने चरणों में।

विद्यार्थी इस गतिविधि को करने में बेहद उत्साहित थे। लग रहा था कि उन्हें प्रतिस्पर्धा की भावना पसंद आई और उन्हें भी लीडर बनने का एक मौक़ा मिला। कुछ शिकायतें भी थीं कि किस प्रकार एक विद्यार्थी ने नक़ल की थी और उसे एक अतिरिक्त अंक दिया गया। मैंने उनसे कहा कि यदि उन्होंने नक़ल की, तो यह उनके लिए बदनामी की बात है और उन्हें स्पष्ट करना होगा कि वे वहाँ तक कैसे पहुँचे, जहाँ अब पहुँचे हैं।

ग़लतियों से सीखने की चर्चा दिलचस्प रही। मैंने उम्मीद की थी कि विद्यार्थी अपनी ग़लतियों के बारे में बात करने के लिए इच्छुक नहीं होंगे, लेकिन मैं ग़लत थी – उन्होंने उसके बारे में बड़े उत्साह से बात की! शायद इसलिए कि वे उनके बारे में पहले अपने समूह में बात कर सके, जो शायद कम झिझक वाला था। फिर मैंने विद्यार्थियों से अपनी ग़लतियों को पूरी कक्षा के साथ साझा करने के लिए कहा, और उन्हें ब्लैकबोर्ड पर लिखा। हमने इन पर इस संदर्भ में चर्चा की कि यह ग़लती क्यों हुई होगी? वे क्या सोच रहे थे?'जो दिलचस्प थी कक्षा में सभी विद्यार्थियों ने इन ग़लत धारणाओं से बहुत कुछ सीखा। हमने इस पर भी चर्चा की कि क्या हमने इन ग़लतियों को करने और इस पर चर्चा करने से कुछ सीखा – और हम सब इस बात से सहमत थे। कुछ विद्यार्थियों ने उल्लेख किया कि अब अंततः उन्हें पता चला कि उनकी धारणा गलत थी। जिन्होंने शुरुआत से ही 'सही' किया था, उन्होंने कहा कि दूसरों को यह कहते हुए सुनना और यह जानना उन्हें अच्छा लगा कि वे क्यों सही ढंग से सोच रहे थे, क्योंकि अक्सर वे गतिविधियाँ और प्रश्न बिना सोच कर ही हल कर रहे थे।

विचार कीजिए

- विद्यार्थियों से किस प्रकार की प्रतिक्रिया अनपेक्षित थी? क्यों?
- अपने विद्यार्थियों की समझ का पता लगाने के लिए आपने क्या सवाल किए?
- क्या आपने किसी भी रूप में काम को संशोधित किया? यदि ऐसा है, तो आपने ऐसा किस कारण से किया?

5 सारांश

इस इकाई में त्रिभुजों में समरूपता और सर्वांगसमता, और गणित की दिशा में एक सकारात्मक रुख़ का विकास करने वाले गणितीय रूप से ऐसे लचीले विद्यार्थियों के विकास पर ध्यान केंद्रित किया गया और जो जानते हैं कि वे विषय को सीखने में आने वाली परेशानियों को दूर कर सकते हैं। इस इकाई को पढ़ते समय आप इस बारे में विचार करेंगे कि कैसे अपने विद्यार्थियों को उनकी शब्दावली विकसित करने में सक्षम करें ताकि वे अपने विचारों के बारे में बात कर सकें और वयस्कों की भाँति अन्य विद्यार्थियों को अपने विचार और अवधारणाएँ (और उनकी ग़लतफ़हमियाँ) समझा सकें। आपने इस पर भी विचार किया होगा कि किस प्रकार विद्यार्थियों को यह समझने में मदद की जाए कि ग़लतियाँ करना शिक्षा का महत्वपूर्ण हिस्सा है, और यदि उन्हें गणित के सफल विद्यार्थी बनना है तो खोज और मेहनत महत्वपूर्ण कौशल है, जिन्हें पाना होगा।

आपने यह भी देखा होगा कि कैसे सामान्य रूप से सीखने में बेहतर बनने के लिए शिक्षण प्रक्रिया पर विचार करना महत्वपूर्ण है। गणितीय रूप से लचीले विद्यार्थियों के परीक्षा में सफल होने की अधिक संभावना है, क्योंकि वे कठिनाइयों से हतोत्साहित नहीं होते हैं, बल्कि उन पर क़ाबू पाने के तरीक़ों की तलाश में रहते हैं, और वे स्कूल से परे अपने जीवन में गणितीय अवधारणाओं का प्रयोग जारी रखने के लिए आवश्यक साधन साथ रखते हैं।

विचार कीजिए

इस इकाई में आपके द्वारा उपयोग किए गए तीन विचार पहचानें जो अन्य विषयों को पढ़ाने में भी काम करेंगे। उन दो विषयों पर अब एक नोट तैयार करें, जिन्हें आप जल्द ही पढ़ाने वाले हैं, जहाँ थोड़े–बहुत समायोजन के साथ उन अवधारणाओं का उपयोग किया जा सकता है।

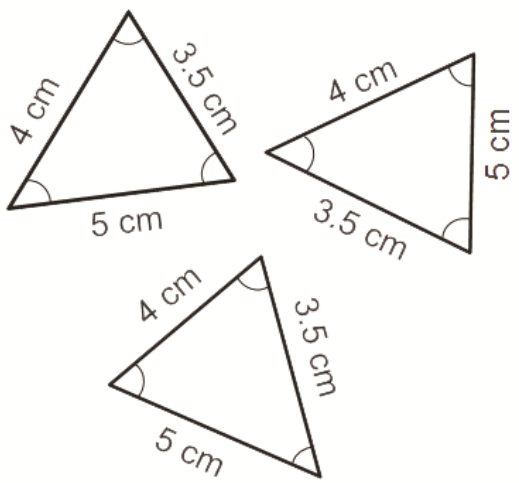
संसाधन

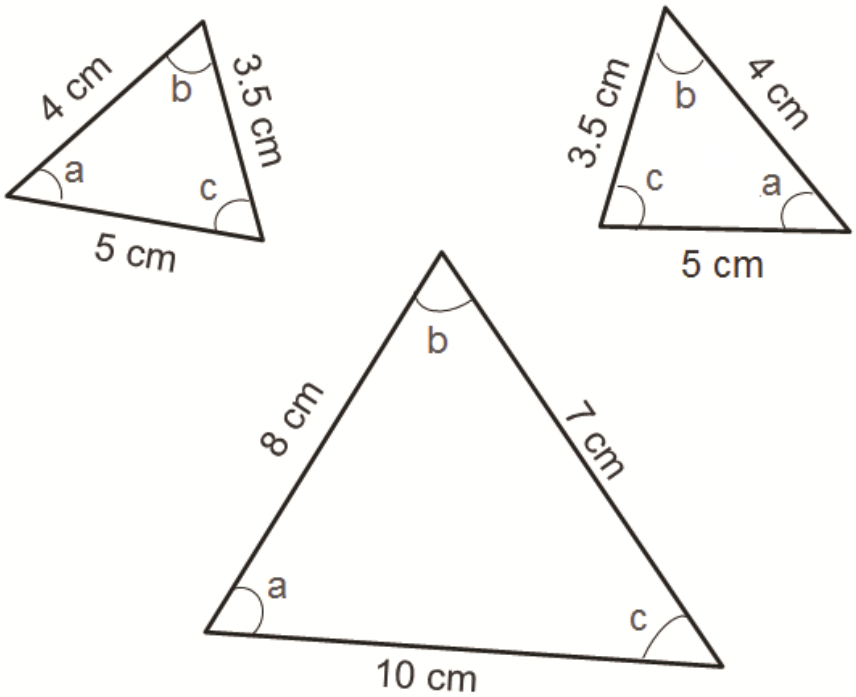
संसाधन 1: NCF/NCFTE शिक्षण आवश्यकताएं

यह इकाई NCF (2005) तथा NCFTE (2009) की निम्न शिक्षण आवश्यकताओं से जोड़ता है तथा उन आवश्यकताओं को पूरा करने में आपकी मदद करेगाः

- शिक्षार्थियों को उनके शिक्षण में सक्रिय प्रतिभागी के रूप में देखें न कि सिर्फ़ ज्ञान प्राप्त करने वाले के रूप में; ज्ञान निर्माण के लिए उनकी क्षमताओं को कैसे प्रोत्साहित करें; रोट पद्धतियों से शिक्षण को दूर कैसे ले जाएँ।
- विद्यार्थियों को गणित को किसी ऐसे रूप में लेने दें, जिसके बारे में वे बात करें, जिसके द्वारा संवाद करें, जिसकी आपस में चर्चा करें, जिसपर साथ मिलकर कार्य करें।
- पाठ्यचर्या, पाठ्यक्रम और पाठ्यपुस्तकों का गंभीर रूप से परीक्षण करते हुए उनसे जुड़ें, न कि बिना कोई सवाल किए 'दिए' गए रूप में उन्हें स्वीकार करें।
- विद्यार्थियों को महत्वपूर्ण गणित सीखने दें और देखें कि गणित, सूत्रों और यांत्रिक प्रक्रियाओं से कहीं बढ़कर है।

संसाधन 2 विद्यार्थी की गणितीय प्रविष्टियों के उदाहरण शब्दकोश

शब्द/अवधारणा	त्रिभुजों में सर्वांगसमता
कहाँ?	अध्याय 10, कक्षा 9
दैनिक जीवन की भाषा में कोई अर्थ?	सर्वांगसमता का अर्थ है– सर्व अंग समान होना
पाठ्यपुस्तक/शिक्षक से गणितीय व्याख्या	'सभी प्रकार से बराबर' या 'आकृतियाँ [इस मामले में त्रिभुज] जिनके समान आकार और समान माप हैं' (SCRT,MP पाठ्यपुस्तक, कक्षा IX, पृ. 206) के लिए
मेरा स्पष्टीकरण	सर्वांगसम त्रिभुज वे त्रिभुज हैं, जिनका आकार और माप एकसमान है। मुझे वास्तव में इसे देखने कभी–कभी उन्हें चारों ओर पलटना या उलटना पड़ता है। इस प्रकार सर्वांगसम त्रिभुजों के लिए उनकी भुजाओं की लंबाई और कोण एकसमान होंगे। लेकिन इतना ही नहीं! उन एकसमान लंबाई वाली भुजाओं और कोणों को त्रिभुज में एक ही जगह पर होना चाहिए – जिसे वे 'समरूप' कहते हैं। जब आप त्रिभुजों को काटेंगे, तब उन्हें एक दूसरे पर रख सकेंगे और वे सही प्रतिलिपियाँ होंगी। सर्वांगसम त्रिभुज साथ ही समरूप त्रिभुज भी हैं, लेकिन समरूप त्रिभुज हमेशा सर्वांगसम नहीं हो सकते! इसके अलावा, 'समरूप त्रिभुजों के लिए मेरी प्रविष्टि पर नज़र डालें ताकि देख सकें कि किस प्रकार ये अवधारणाएँ जुड़ी हुई हैं।
उदाहरण	ये त्रिभुज सर्वांगसम हैं: 

शब्द / अवधारणा	त्रिभुजों की समरूपता
कहाँ?	(SCERT,MP की पाठ्यपुस्तक अध्याय 6, कक्षा X)
दैनिक जीवन की भाषा में कोई अर्थ?	कोई ऐसी चीज़ जो किसी और चीज़ के समान है। अक्सर यह स्पष्ट नहीं किया जाता कि वह क्या है, जो किसी चीज़ को किसी और चीज़ के समान बनाती है।
पाठ्यपुस्तक / शिक्षक से गणितीय व्याख्या	'दो त्रिभुज समरूप हैं, यदि (i) उनके संगत कोण बराबर हों और (ii) उनकी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में (या समानुपाती) हों।' (SCRT,MP की पाठ्यपुस्तक
मेरा स्पष्टीकरण	अपने लिए नोटः सर्वांगसम के साथ न उलझाएँ! समरूप त्रिभुजों का एकसमान आकार हो सकता है, लेकिन *ज़रूरी नहीं* कि उनका माप एकसमान हो। यदि उनका एकसमान आकार हो और एकसमान माप हो, तो वे समरूप और साथ ही सर्वांगसम हैं। इसलिए उनका आकार समरूप होना आवश्यक है, लेकिन माप एकसमान होना ज़रूरी नहीं। उन्हें समरूप बनाने वाली चीज़ है कि उनका आकार एक दूसरे की आनुपातिक वृद्धि या कमी हैं। इसका मतलब है कि संगत सभी भुजाओं का अनुपात एकसमान है (उदाहरण के लिए, दूसरे त्रिभुज की भुजाओं का माप पहले से दुगुना था)। और इसलिए त्रिभुजों की समरूपता के बारे में ये मापदंड मायने रखते हैं।
उदाहरण	ये त्रिभुज समरूपी हैं:, 
शब्द / अवधारणा	समान कोणिक
कहाँ?	SCERT,MP की पाठ्यपुस्तक कक्षा 10 अध्याय 6

दैनिक जीवन की भाषा में कोई अर्थ?	कोण समान होना
पाठ्यपुस्तक/शिक्षक से गणितीय व्याख्या	यदि आकृतियां जैसे त्रिभुज चतुर्भुज मे एक आकृति के कोण दूसरी आकृति के संगत कोणो के बराबर हो तो वे समान कोणिक होंगे।
मेरा स्पष्टीकरण	यदि दो आकृतियो मे एक आकृति के कोण दूसरी आकृति के संगत कोणो के बराबर हो तो वे आकृतियां समान कोणिक होंगी समान कोणिक आकृतियां माप मे एक दूसरे के बराबर हो आवश्यक नही है ये एक दूसरे से छोटी बड़ी हो सकती है।
उदाहरण	दो त्रिभुजो मे यदि भुजाओ मे अनुपात समान हो तो त्रिभुज आपस मे समान कोणिक होते है समरूप त्रिभुज ΔABC तथा ΔDEF समरूप है। चित्र जोड़ना है –

अतिरिक्त संसाधन

- A newly developed maths portal by the Karnataka government: http://karnatakaeducation.org.in/KOER/en/index.php/Portal:Mathematics
- Class X maths study material: http://www.zietmysore.org/stud_mats/X/maths.pdf
- National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics: https://www.ncetm.org.uk/
- National STEM Centre: http://www.nationalstemcentre.org.uk/
- OpenLearn: http://www.open.edu/openlearn/
- BBC Bitesize: http://www.bbc.co.uk/bitesize/
- Khan Academy's math section: https://www.khanacademy.org/math
- NRICH: http://nrich.maths.org/frontpage
- Mathcelebration: http://www.mathcelebration.com/
- Art of Problem Solving's resources page: http://www.artofproblemsolving.com/Resources/index.php
- Teachnology: http://www.teach-nology.com/worksheets/math/
- Maths is Fun: http://www.mathsisfun.com/
- National Council of Educational Research and Training's textbooks for teaching mathematics and for teacher training of mathematics: http://www.ncert.nic.in/ncerts/textbook/textbook.htm
- LMT-01 *Learning Mathematics*, Block 1 ('Approaches to Learning') Block 2 ('Encouraging Learning in the Classroom'), Block 6 ('Thinking Mathematically'): http://www.ignou4ublog.com/2013/06/ignou-lmt-01-study-materialbooks.html
- *Learning Curve* and *At Right Angles*, periodicals about mathematics and its teaching: http://azimpremjifoundation.org/Foundation_Publications
- Central Board of Secondary Education's books and support material (also including the *Teachers Manual for Formative Assessment – Mathematics (Class IX)*) – select 'CBSE publications', then 'Books and support material': http://cbse.nic.in/welcome.htm

संदर्भ / संदर्भग्रंथ सूची

Bell, A. (1986) 'Diagnostic teaching 2: developing conflict: discussion lesson', *Mathematics Teaching*, no. 116, pp. 26–9.

Bell, A. (1987) 'Diagnostic teaching 3: provoking discussion', *Mathematics Teaching*, no. 118, pp. 21–3.

Bouvier, A. (1987) 'The right to make mistakes', *For the Learning of Mathematics*, vol. 7, no. 3, pp. 17–25.

Dweck, C. (2000) *Self Theories: Their Role in Motivation, Personality and Development*. Lillington, NC: Psychology Press, Taylor & Francis.

Lee, C. and Johnston-Wilder, S. (2013) 'Learning mathematics – letting the pupils have their say', *Educational Studies in Mathematics*, vol. 83, no. 2, pp. 163–80.

Mason, J. (1988) *Learning and Doing Mathematics*. London: Macmillan.

Mason, J., Burton, L. and Stacey, K. (2010) *Thinking Mathematically*, 2nd edn. Harlow: Pearson Education.

Nardi, E. and Steward, S. (2003) 'Is mathematics T.I.R.E.D.? A profile of quiet disaffection in the secondary mathematics classroom', *British Educational Research Journal*, vol. 29, no. 3, pp. 345–66.

National Council of Educational Research and Training (2005) *National Curriculum Framework (NCF)*. New Delhi: NCERT.

National Council of Educational Research and Training (2009) *National Curriculum Framework for Teacher Education (NCFTE)*. New Delhi: NCERT.

National Council of Educational Research and Training (2012a) *Mathematics Textbook for Class IX*. New Delhi: NCERT.

National Council of Educational Research and Training (2012b) *Mathematics Textbook for Class X*. New Delhi: NCERT.

Polya, G. (1962) *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving*, two volumes. New York, NY: John Wiley & Sons.

Watson, A., Jones, K. and Pratt, D. (2013) *Key Ideas in Teaching Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

SCERT, MP की पाठ्यपुस्तक कक्षा 9 एवं 10

अभिस्वीकृतियाँ

यह सामग्री क्रिएटिव कॉमन्स एट्रिब्यूशन–शेयरएलाइक लाइसेंस (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/) के अंतर्गत उपलब्ध कराई गई है, जब तक कि अन्यथा निर्धारित न किया गया हो। यह लाइसेंस TESS-India, OU और UKAID लोगो के उपयोग को वर्जित करता है, जिनका उपयोग केवल TESS-India परियोजना के भीतर अपरिवर्तित रूप से किया जा सकता है।

कॉपीराइट के स्वामियों से संपर्क करने का हर प्रयास किया गया है। यदि किसी को अनजाने में अनदेखा कर दिया गया है, तो पहला अवसर मिलते ही प्रकाशकों को आवश्यक व्यवस्थाएं करने में हर्ष होगा।

वीडियो (वीडियो स्टिल्स सहित): भारत भर के उन अध्यापक शिक्षकों, मुख्याध्यापकों, अध्यापकों और विद्यार्थियों के प्रति आभार प्रकट किया जाता है जिन्होंने उत्पादनों में दि ओपन यूनिवर्सिटी के साथ काम किया है।