## Developing mathematical reasoning: mathematical proof 

 กణణికిలయు నౌధెనె
















ఆ ఘ゙జరదల్లిన శేలపు జెణుదణికొగగళు

 సెలబిసుత్తదది.



 అసెదుథఁఁరాదరరి నిద్ము అనుభేదగళిగి సెండులణఁదాగుదుదిల్ల.




## Version 2.0 SM02v1 <br> Karnataka

Except for third party materials and otherwise stated, this content is made available under a Creative Commons Attribution-ShareAlike licence: http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/

TESS-India is led by The Open University UK and funded by UK aid from the UK government

## ஆ ఘ゙టگర యోదుదేరె బగ్గ?





 రల్టిసెల $ల$ గుత్తదా.









## ఈ ఘెళరదెల్లి నిలదు ఉనెన్ను శలియుబळుదు?

 సెపుథథఁరన్నాగిసుదుదు?


 రల్టిసుత్తది.

## 












- ఒందు ळేలళికేయు స்త్యదన్ను తాళ నొలeడుదుదు.

 దూలలళ శృదుబద్ధెతెగొలళిసుదుదు.

- గెణితదద జ్ఞəనేదన్ను రదదానిసెలు దూడలు సుందేळను దూడుపుదు.


 నెలeడుపుదు.

 సెలळేగెళన్ను శొండుత్తది.



## నిల్లి... ఆలఃอนిసి

 డఠ్యశృచుదల్లి ఇరెబిలశై?





## 2 అదు సౌృధినెయిల?









 యోవుదిందెరి:


- గణితిలయ లర్షణగగళెన్ను తిళిదుశొอళ్ళుదుదు దుత్తు స్లరిసిశొలళ్ళువుదు.




 నాధధసుదరాందు శేల్ుత్తరరి.



పిద్యాథి₹: $180^{\circ}$.
ిిర్షరి: నిeను 2బితెదాగి ळలళుత్తిద్దిలయో?
ఎిద్యాథి₹: ळౌదు, 2ండితేదాగి.







 [ఐదు నిడితెగళళ నంంతర.]
 ळீఆుత్తిలరృ?

 దూఠడబదుదు".








## నిల్లి... ఆలోอఁబిసి

 బెలరె పిధానెగళిదొయిల? ఈ సౌధెనేగెళ బగ్గె ळేగగ సెదాలేసేయుబఱుదు?

## 3 గగణితేది లర్షెణగెళన్ను దుత్తు సెత్యంరేగెళన్ను తిళిదుళిలళ్ళుదుదు










 బెళానిశైళ్ళెబळుదు.

















```
\omegaెడ్టి దూడుదుదు
```

 నిద్ము పిద్యాథిఁగిళిగి తిళిసి．





| నిరేంపిసెల్పణ్మ అథెదా <br> స్టిలశృతదాదే <br> ळేలళిరే అథేదా <br> సెతみ० | లుదాळరెణేయున్ను బరేయిరి అథేదా ひిక్తిసి | నెనగగீ ఇదు <br> గొอత్తిదึయో <br> దెరె，నెనెగా <br> అదొ <br> గెองิది．．． |
| :---: | :---: | :---: |
| ఒంద゙ల అంరైః సెదునాగిరుదె అంరెగళు <br>  సెదునాగిరుత్తెది． <br>  లర్షణ） |  |  |
| సెదుభాగెกళిగి <br> సెదుభాగగగళన్ను <br>  <br> సెదునాగిరుత్తహద． | $\begin{aligned} & 7+3=4+6 \\ & 23-4=19-0 \end{aligned}$ <br> ఆద్దరిందే： $7+3+23-4=4+6+19-0$ |  |
| సెదుభాగెగళిందు సెదుభాగెగెళస్ను రళాదాగగ， ఢలితాంశెగెళఃం సెదునాగిరుత్తఠా． |  |  |
| థృలణદపు అదర యోవుుదాల భอగిశ్రింత దొలడ్డెదాగిరుత్తెది． |  |  |


| ఒందు బిందుదిసల్లి లుంణౌదె ఎల్ల <br>  |  | ఒందు <br>  <br> むoeసచు $180^{\circ}$ |
| :---: | :---: | :---: |
| సెదూదంతెర <br> రెలజిగెళన్ను ఒందు <br> సెరళళరాఁః <br> ผُలదిసిదాగగ <br> లుంఱวద్ <br> ซృంగాభిదొ2 <br> జొలొనగగళు సెదు <br> దుత్తు అనురృడ <br>  |  | шaひృఁaひ <br> むoenగis <br> 入ై |
| ఎరెడు <br>  <br> ఉరస్టుర భُలదిసిదాగ <br> లుంఱวกుదద <br> ళృంగృభిడు2 <br>  |  |  |


 బరెయుబల్లిరా？



 దూదిరొండలలు డ్రయిత్నిసి．

## 

## సౌధిసుదుదు




ஆగ నిద్ము పిద్యాథిรగళిగి ळేఁళి:





##  ఒంతనిశిలరాగుతత్తరా.








 ธొอణ్డె:






















## నిద్ము బొలeధెనా అభ్యాసెద్ బగ్గి ఒింతనెళిలలరాగుదుదు











## నిల్లి... ఆలఃอนนిసి



- నిద్ము తరరగగి ணొలగ నడేయితు?



- యీద అంరగళక్ను నిలపు పునబబలనగగంళిసెబాలశొందినిసితు?
 రృరెణగెళాపుదు?


## 

## 




 నిబంధేనేగళెన్ను ద్యాఖ్యానిసుదుదొ అడ్ష్మి మొ2్య.


 దూడుత్తెది. దొందినె జెణుదణిశియు ఈ ఱద్ధెియిన్ను బళతుత్తెది.

## 

## 







a. ఒందు బితృృహళదేన్ను దึలడ్డెదాగిసువుదు.






h. ేుతబా దినారా (ఒిత్ 1)నె ఎత్తరు.


బిత్త 1 పుతబా షినారో, దేळలి.
i. ఒందు దృత్తతద దిస్తిలణణ
j. ఒందు దుగఁదద దిస్తిలణร
k. ఒందు సిలిండరిన ఎత్తరె దుత్తు అదరర తిక్యద గుణలబ్ధ
I. ఒందు రంపుตినె గృత్ర.
m. రిక్షా దదర.
 ఒితనెిాలరాగుత్తరరా.





 పిరారాదాగి రాణుత్తదే".








- ' $ఇ ద ు ~ \overrightarrow{ల ు ద ు న ా గ ి ద ి, ~ ఇ ద ు ~ బ ి ల ర ో య ో ా గ ి ద ’ ' . ~}$






## నిల్లి... ఆలภeఒిసి

 బళ่సిదిరి?





## 5 దునెదరిశె దూడెలు శలియుదుదు
























 దేలల ఆధారితపాదా దాదేగెళన్ను బళససెబొలరాగుత్తదా.


## बృصదే సిద్ధెత

 సెదుంజసెదాదేపుగెళె్ను ఆయ్మె దూపదిపేళళ్ళి.
జెటుฝెణిశె
శేళెగినేుుగైన్ను నిద్ము పిద్యాథిఁగళిగి ळేఁళి:


a. $p$ ఒందు అదిభాజ్య సెంఖ్యియోదెరో, p+1 ఒందు భอజ్య సెంఖ్యయయాగిరుత్తది.


d. ఒందు తి,భుజద గురుత్కరెంంద్పుు తిభుజద ఒళిగిరుత్తదా.
e. అపిభాజ్య సెంఖ్యిగళు అఱెరిపితెదాగిదా.
 బారి స்త్య అథేదా యాదాగెలృ तंత్యద్ల?

##  దూూడిరొండి, రాదునుజంరిగి దునెదరిళే దూడిిని.

నిద్ము చిద్యాథిఁగగళిగి ळేలళి:




- నిదుగి
- నిప్ము స్నెలాఃశతరిగ
- రాదూనుజంరేదరిగి
 దాదాదిందె దునెదారిళా ఱడెదిదా్దరొయొల?


## 

## హిలడుతి.నాగ்రృజురెదేరు ఒింతనశిలలరుగుతత్తరె.








 సెదుథఁనేగఆళన్ను రండిసిశొళ్ళలు బలడ్డిసిదుంతాయితు.









 ఆయితు" దందరు.


చిడియீอ: కలిశేగాగి దూతతు
 3న్ను నొలeడి.

నిల్లి... ఆలోอеజిసి

- నిప్ము తరరగగితి దేగగ నేడాయితు?

 ठวరెణగగళాపుపు?


## 6 నెరాంళ







 అంశగగెన్ను డ్లశంసిస్లుదంతె దూృడుత్తేది.

## నిల్లి... ఆలึอชజిసి


 గురుతిని.

## సెండనై $ల$ గెళు

## 

 ఏడెఁడిసుత్తంది:

 డడయొయదదరంంత అల్ల.
 నిరుంతరర డ్, $ి య ి య ొ ం ద ు ~ భ ా ప ి స ి . ~$










 దూగగఁదదరఁన నిలడుదాగ.


- ఒందు తెడ్టస్ను సెరిడెడిసెుదాగ

- అదరర తిళుదళిరియున్ను Шరాలి్షిసుదాగ


 పిభాగిసెబడుదు:









## 












## నిద్ము 山్లిిరియి మొ2్యదాదుదు














 ేండుత్తదా.







## ఱృతిరియిగేళ గుణదుణ్కదన్ను అభిదృద్ధిదుదినుదుదు



 దొృలళ దూడడబపుదు:

- మొలగ అథథదా ఏరా?
- లుత్తరిసు山ద ఇన్నాందు పిధాన
- ఇన్న్నా ఒళ్ళియు ఱదద
- లుత్తెరేర్రు సెదుథెఁనె అథెదా నౌర్ష్యా ధారర


























 అరియిబముదు.


 ఉను ఱృలరెణ ఇరుత్తదా?


## $\overrightarrow{\mathrm{N}} \mathbf{}$ డున్లృల 3: శలిరేగాగి దూతనాడుదుదు

## శలిశగగాగి దూతనాడుదుదు ఎశొ దొ2్యదాదుదు




 దూతనాడువుదిందెరి:

- ఆ చిజారుగెళన్ను అన్న్లeడ్ణణ దూడుదుదాగిది.
- శారెణిలశరిసుదిశెయున్ను బిళొసుదుదు దుత్తు యాఠలజిసుదుదాగిది.












## తరరెగెతియల్లి దూతుగారికేయున్ను శెలిరా జెణుదెణికొగెళిగాగి యిలజినుదుదు








 డరిळారుగెళన్ను డెడ్టిదూడబల్లరు.



 సౌర్ష్యా ధారెగళళన్ను దుత్తు సెలळేగెళన్ను తులనేదూడుుదుదు.




## దిద్యాథిఁగఁళ దึృతుగెళ దిలe? రెజిసుదుదు

శలిరేగాగి దూతతనాడుపుదు ిిర్షరిరిగే శేళగినె అదేరారగగళన్ను ఒదగిసుత్తెదే:


















## 












 డ్లర్నా జాల (Question grid)ద్న్ను పొలది.








## ఱదేశైల్ర（Glossary）

－గెణితిలయు రృరెణిలకరరిసుదెంతత
－గెణిలతిలయ నురధినా
－ernळ゚గేళు
－ఱృయయ๐లగిశ సిద్ధాంత
－దొలల゚గెల్లుగెళు
－స్టిలశరిసిదె లర్షశణ
－సెండ్ృదాయిక రెలఖా గెణిత
－నిలరీఠపిసెల్టణ్ష ळొరిరేగేళు
－స్టిలశృతదాగిరు ळొలఖిశొగేళు
－సైひుణశ లశ్షణ
－छెల్టనొ
－దుతి దుంథెన
－बرలా రృల
－mathematical reasoning
－mathematical proof
－conjectures
－empherical theory
－corner stones
－assumption
－classical geometry
－established statements
－accepted statements
－transitive property
－notion
－brainstorm
－question grid

## Additional resources

－＇Proof－sum of measures of angles in a triangle are 180 ＇by Khan Academy： https：／／www．khanacademy．org／math／geometry／angles／v／proof－－－sum－of－measures－of－angles－ in－a－triangle－are－180
－A newly developed maths portal by the Karnataka government：
http：／／karnatakaeducation．org．in／KOER／en／index．php／Portal：Mathem atics
－Class X maths study material：http：／／www．zietmysore．org／stud mats／X／maths．pdf
－National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics：https：／／www．ncetm．org．uk／
－National STEM Centre：http：／／www．nationalstemcentre．org．uk／
－OpenLearn：http：／／www．open．edu／openlearn／
－BBC Bitesize：http：／／www．bbc．co．uk／bitesize／
－Khan Academy＇s math section：https：／／www．khanacademy．org／math
－NRICH：http：／／nrich．maths．org／frontpage
－Mathcelebration：http：／／www．mathcelebration．com／
－Art of Problem Solving＇s resources page：
http：／／www．artofproblemsolving．com／Resources／index． php
－Teachnology：http：／／www．teach－nology．com／worksheets／math／
－Maths is Fun：http：／／www．mathsisfun．com／

- National Council of Educational Research and Training's textbooks for teaching mathematics and for teacher training of mathematics: http://www.ncert.nic.in/ncerts/textbook/textbook.htm
- LMT-01 Learning Mathematics, Block 1 ('Approaches to Learning') Block 2 ('Encouraging Learning in the Classroom'), Block 6 ('Thinking Mathematically'): http://www.ignou4ublog.com/2013/06/ignou-Imt-01-study-materialbooks.html
- Learning Curve and At Right Angles, periodicals about mathematics and its teaching: http://azimpremjifoundation.org/Foundation Publications
- Central Board of Secondary Education's books and support material (also including the Teachers Manual for Formative Assessment - Mathematics (Class IX)) - select 'CBSE publications', then 'Books and support material': http://cbse.nic.in/welcome.htm
- Karnataka State's Mathematics Textbooks - VIII, IX and X standard.


## References/bibliography

De Geest, E. (2007) Many Right Answers: Learning in Mathematics Through Speaking and Listening. London: The Basic Skills Agency. Available from: http://shop.niace.org.uk/media/catalog/product/m/a/manyrightanswers.pdf (accessed 4 September 2014).

Hanna, G. (2000) 'Proof, explanation and exploration: an overview', Educational Studies In Mathematics, vol. 44, no. 1-3, pp. 5-23.

Hastings, S. (2003) 'Questioning', TES Newspaper, 4 July. Available from: http://www.tes.co.uk/article.aspx?storycode=381755 (accessed 22 September 2014).

Hattie, J. (2012) Visible Learning for Teachers: Maximising the Impact on Learning. Abingdon: Routledge.

Lakatos, I. (1976) 'Proofs and refutations’ in Worral, J. and Zahar, E. (eds) The Logic of Mathematics Discovery. Cambridge: Cambridge University Press.

Lee, C. (2006). Language for Learning: Assessment for Learning in Practice. Maidenhead: Open University Press.

Mason, J., Burton, L. and Stacey, K. (2010) Thinking Mathematically, 2nd edn. Harlow: Pearson Education. Murray, M. (2004) Teaching Mathematics Vocabulary in Context. Portsmouth, NH: Heinemann.

National Council of Educational Research and Training (2005) National Curriculum Framework (NCF). New Delhi: NCERT.
National Council of Educational Research and Training (2009) National Curriculum Framework for Teacher Education (NCFTE). New Delhi: NCERT.

National Council of Educational Research and Training (2012a) Mathematics Textbook for Class IX. New Delhi: NCERT.

National Council of Educational Research and Training (2012b) Mathematics Textbook for

Class $X$. New Delhi: NCERT.
Watson, A., Jones, K. and Pratt, D. (2013) Key Ideas in Teaching Mathematics. Oxford:
Oxford University Press.
Zack, V. and Graves, B. (2001) 'Making mathematical meaning through dialogue: "Once you think of it, the $Z$ minus three seems pretty weird"', Educational Studies in Mathematics, vol. 46, pp. 229-71.

## Acknowledgements

Except for third party materials and otherwise stated below, this content is made available under a Creative Commons Attribution-ShareAlike licence (http://creativecommons.org/licenses/by$\mathrm{sa} / 3.0 /$ ). The material acknowledged below is Proprietary and used under licence for this project, and not subject to the Creative Commons Licence. This means that this material may only be used unadapted within the TESS- India project and not in any subsequent OER versions. This includes the use of the TESS-India, OU and UKAID logos.

Grateful acknowledgement is made to the following sources for permission to reproduce the material in this unit:

Figure 1: Clare Lee for The Open University.
Every effort has been made to contact copyright owners. If any have been inadvertently overlooked the publishers will be pleased to make the necessary arrangements at the first opportunity.

Video (including video stills): thanks are extended to the teacher educators, headteachers, teachers and students across India who worked with The Open University in the productions.

