माध्यमिक गणित

मानसिक चित्रण का उपयोग करना: बीजगणितीय सर्वसमिकाएँ

भारत में विद्‌यालय आधारित समर्थन के माध्यम से शिक्षक शिक्षा

www.TESS-India.edu.in

http://creativecommons.org/licenses/

संदेश

शिक्षकों को बाल केंन्द्रित कक्षा अभ्यास की ओर उन्मुख करने तथा शिक्षक प्रशिक्षण की गुणवत्ता को बेहतर बनाने के उद्देश्यों को सम्मुख रखते हुए TESS-India राष्ट्रीय स्तर पर कार्यरत है। इस दिशा में TESS-India द्वारा मुक्त शैक्षिक संसाधन (Open Educational Resources) का विकास किया गया है । ये संसाधन शिक्षकों तथा शिक्षक–प्रशिक्षकों के वृत्ति विकास (Professional development) में लाभकारी एवं उपयोगी सिद्ध होंगे। राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद, बिहार के नेतृत्व में इन संसाधनों का स्थानीयकृत किया गया है, जिसके अन्तर्गत इनके उद्देश्य के मूल को बरकरार रखते हुए इनमें स्थानीय, भाषा, बोली, प्रथाओं, संस्कृतियों तथा नियमों को सम्मिलित किया गया है। इनका उपयोग शिक्षण कार्य में सहजता एवं सुगमता पूर्वक किया जा सकता है ।

राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद, बिहार के मार्गदर्शन में TESS-India द्वारा स्थानीय भाषा में तैयार मुक्त शैक्षिक संसाधन (Open Educational Resources) नेट पर आप सभी के लिए सुलभ उपलब्ध है ।

शुभकामनाओं सहित ।

(डॉ0 मुरली मनोहर सिंह)
निदेशक
एस0सी0ई0आर0टी0, बिहार

समीक्षा एवं दिशाबोध
डॉ. मुरली मनोहर सिंह, निदेशक राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार
डॉ. सैयद अब्दुल मोईन, विभागाध्यक्ष, अध्यापक शिक्षा विभाग, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार
डॉ. क़ासिम खुर्शीद, विभागाध्यक्ष, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्
डॉ. इम्तियाज़ आलम, विभागाध्यक्ष, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार
डॉ. स्नेहाशीष दास राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार
डॉ. अर्चना, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार
डॉ. रीता राय, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार
श्री तेज नारायण प्रसाद, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार

स्थानीयकरण
भाषा और शिक्षा
डॉ. ज्ञानदेव मणि त्रिपाठी, प्राचार्य, मैत्रेय कॉलेज ऑफ एडुकेशन एण्ड मैनेजमेंट, हाजीपुर, वैशाली
श्री सुमन सिंह, प्रखंड साधनसेवी, भगवानपुर हाट, सिवान
श्री कात्यायान कुमार त्रिपाठी, प्राथमिक विद्यालय चैलीटाल, पटना
श्री कृत प्रसाद, प्रखंड साधनसेवी, हिलसा, नालंदा
प्राथमिक अंग्रेज़ी
श्री अरशद रज़ा, सहायक शिक्षक, प्राथमिक विद्यालय, पचासा रहुई, नालंदा
श्री संतोष सुमन, सहायक शिक्षक, बालिका उच्च विद्यालय, महुआबाग
श्री शशि भूषण पाण्डेय, सहायक शिक्षक, उत्क्रमित मध्य विद्यालय, मुकुन्दपुर, नालंदा
श्रीमती रचना त्रिवेदी, शिक्षिका, नोट्रेडेम अकादमी, पटना
माध्यमिक अंग्रेज़ी
श्री मणिशंकर, प्रधानाध्यापक, तारामणी भगवानसाव उच्च माध्यमिक विद्यालय, कोइलवर, भोजपुर
डॉ. ब्रजेश कुमार, शिक्षक, पी. एन. एंग्लो संस्कृत माध्यमिक विद्यालय, नया टोला, पटना
प्राथमिक गणित
श्री कृष्ण कान्त ठाकुर
श्री दिलीप कुमार, संकुल संसाधन केन्द्र समन्वयक, बुलनी हैदरपुर, नालंदा
श्री गोविन्द प्रसाद, प्रखंड साधनसेवी, चनपटिया, पश्चिमी चम्पारण
माध्यमिक गणित
डॉ. राकेश कुमार, भागलपुर डायट
श्री रिज़वान रिज़वी, उत्क्रमित मध्य विद्यालय, सिलौटा चाँद, कैमूर
श्री इन्द्रभूषण कुमार, शिक्षक, सहयोगी माध्यमिक विद्यालय, हाजीपुर, वैशाली
प्राथमिक विज्ञान
श्री मनोज त्रिपाठी, प्रखंड साधनसेवी, बरहारा, भोजपुर
श्री शशिकान्त शर्मा, प्रखंड साधनसेवी, आरा, भोजपुर
श्री रणबीर सिंह, संकुल संसाधन केन्द्र समन्वयक, आदर्श आवासीय मध्य विद्यालय शिक्षक संघ, सहरसा
माध्यमिक विज्ञान
श्री जी.वी.एस.आर प्रसाद
श्री मुकुल कुमार, शिक्षक, सहायक शिक्षक, गोरखनाथ सूर्यदेव माध्यमिक विद्यालय, राजापाकर वैशाली

TESS-India (Teacher Education Through School Based Support) का लक्ष्य है भारत में मुक्त शैक्षिक संसाधनों के द्वारा प्राथमिक और माध्यमिक स्तरों पर शिक्षकों के कक्षा अभ्यासों को बेहतर करना। ये संसाधन शिक्षकों के छात्र–केन्द्रित, भागीदारी दृष्टिकोण को विकसित करने में सहायता करेंगे।

TESS-India के मुक्त शैक्षिक संसाधन (*Open Education Resources – OERs*) *शिक्षकों को स्कूल की पाठ्यपुस्तक के लिए सहायक पुस्तिका प्रदान करते हैं।* ये संसाधन शिक्षकों के लिए गतिविधियाँ प्रदान करते हैं जो वे कक्षा में अपने छात्रों के साथ कर सकते हैं। साथ ही इनमें केस स्टडी भी हैं जो ये दर्शाते हैं कि किस प्रकार दूसरे शिक्षकों ने उस विषय को सिखाया है। संबंधित संसाधन शिक्षकों को पाठ योजना बनाने में और विषय पर ज्ञान वर्धन करने में उनकी सहायता करते हैं।

TESS-India के मुक्त शैक्षिक संसाधन भारतीय पाठ्यक्रम और संदर्भों के अनुकूल हैं। ये *भारतीय तथा अतंर्राष्ट्रीय लेखकों के सहयोग से तैयार* किये गये हैं *और ये ऑनलाइन तथा प्रिंट उपयोग के लिए उपलब्ध है (http://www.tess-india.edu.in) /* मुक्त शैक्षिक संसाधन अनेकों संस्करणों में उपलब्ध हैं जो प्रत्येक राज्य के लिए उपयुक्त है जहाँ TESS India कार्यरत है। उपयोगकर्ता इन संसाधनों को अनुकूल और स्थानीयकृत करने के लिए स्वतंत्र हैं ताकि ये स्थानीय आवश्यकताओं और संदर्भों को पूरा कर सकें।

TESS-India मुक्त विश्वविद्यालय, ब्रिटेन के नेतृत्व में तथा ब्रिटेन की सरकार द्वारा वित्त-पोषित है।

वीडियो संसाधन

इस इकाई की कुछ गतिविधियों के साथ निम्न प्रतीक का उपयोग किया गया है: . इससे संकेत मिलता है कि निर्दिष्ट अध्यापन संबंधी थीम के लिए TESS-India वीडियो संसाधनों को देखना आपके लिए उपयोगी होगा।

TESS-India वीडियो संसाधन भारत में अनेक प्रकार की कक्षाओं के संदर्भ में मुख्य अध्यापन तकनीकों का वर्णन करते हैं। हमें आशा है कि वे आपको इसी प्रकार के अभ्यासों के साथ प्रयोग करने के लिए प्रेरित करेंगे। उनका उद्देश्य पाठ (टेक्स्ट) पर आधारित इकाइयों के माध्यम से काम करने के आपके अनुभव का पूरक होना और उसे बढ़ाना है।

TESS-India वीडियो संसाधनों को ऑनलाइन देखा या TESS-India की वेबसाइट, http://www.tess-india.edu.in/ से डाउनलोड किया जा सकता है। वैकल्पिक रूप से, आप ये वीडियो सीडी या मेमोरी कार्ड के माध्यम से भी देख सकते हैं।

संस्करण 2.0 SM01v1
Bihar

तृतीय पक्षों की सामग्रियों और अन्यथा कथित को छोड़कर, यह सामग्री क्रिएटिव कॉमन्स एट्रिब्यूशन–शेयरएलाइक लाइसेंस के अंतर्गत उपलब्ध कराई गई है: http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/

TESS-India is led by The Open University UK and funded by UK aid from the UK government

यह इकाई किस बारे में है

बीजगणितीय सर्वसमिकाएँ, गणितीय पाठ्यचर्या और सामान्य गणित में एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं। भारतीय माध्यमिक विद्यालयों की कक्षा 9 की पाठ्यचर्या में समीकरणों और बहुपदों को हल करने के लिए आठ प्रकार की सर्वसमिकाओं का उपयोग किया जाता है। इन सर्वसमिकाओं को जानने और पहचानने से छात्र–छात्राओं को गणितीय प्रक्रियाओं को जानने में मदद मिलेगी। यह उन्हें इन प्रक्रियाओं को बीजगणितीय व्यवहार और समस्या हल लागू करते समय सरलता विकसित करने में भी सक्षम बनाएगा। सर्वसमिकाओं के महत्व को पूरी तरह से उपयोग करने के लिए, बीजगणितीय सर्वसमिकाओं में उतार–चढ़ाव को पहचानने में सक्षम होना महत्वपूर्ण है। सर्वसमिकाओं को सीखते और लागू करते समय मुख्य समस्या यह है कि अधिकांश छात्र–छात्राओं के लिए यह काम बस याद रखने और उगलने का प्रश्न होता है।

इस इकाई में दृश्य निरूपणों का उपयोग करके कुछ विभिन्न तरीके बताए जाएँगे, जिनका उपयोग आप अपने छात्र–छात्राओं के साथ उनकी बीजगणितीय सर्वसमिका सीखने में मदद करने के लिए कर सकते हैं। ये तरीके याद रखने पर कम और इसके बजाय सर्वसमिकाओं की अवधारणाओं की समझ विकसित करने पर अधिक भरोसा करते हैं।

आप इस इकाई में सीख सकते हैं

- अपने छात्र–छात्राओं को सर्वसमिकाओं के निर्माण की खोज करने और छान–बीन करने में मदद के लिए चित्रों का किस प्रकार उपयोग करें।
- कुछ विचार कि स्मृति पर निर्भर किए बिना किस प्रकार सर्वसमिकाओं का उपयोग करें और उन्हें कैसे लागू करें।
- गणित हल करने की प्रक्रिया पर ध्यान केंद्रित करने के लिए अपने छात्र–छात्राओं को वर्तमान कार्यों को किस प्रकार समायोजित करें।

इस इकाई का संबंध संसाधन 1 में दर्शाई गई NCF (2005) और NCFTE (2009) शिक्षण आवश्यकताओं से है।

1 याद रखते हुए सीखना

याद रखते हुए सीखना, या रटना, दोहराव पर आधारित एक शिक्षण तकनीक है।

सीखने–सिखाने के इस तरीके के समर्थन में कई तर्क हैं: एक यह है कि गणित में कुछ तथ्यों का तुरंत याद आना गणित के अन्य इकाइयों में निपुण बनने के लिए आवश्यक है।

कई छात्र–छात्राओं को अपना पहाड़ा रटकर याद करने के लिए प्रोत्साहित किया जाता है। ऐसा इसलिए ताकि सवालों को हल करते समय वे 6×7 जैसी अपेक्षाकृत सरल गणनाएँ करने में समय व प्रयास न लगाएँ – विशेष रूप से जब उनके पास कैल्क्यूलेटर न हो। पहाड़ा को कंठस्थ याद रखने से उन्हें संख्याओं का बेहतर बोध भी प्राप्त होता है; उदाहरण के लिए, संख्याओं के परिमाण का और इस बात का कि संख्याएँ किस प्रकार संबंधित हैं या गुणज और भिन्न क्या हैं। इसी प्रकार के तर्कों का उपयोग याद रखते हुए बीजगणितीय सर्वसमिकाओं को सीखने के लिए भी किया जा सकता है।

हालाँकि, याद रखने की सीखने–सिखाने की प्रक्रिया के विरोध में भी कई तर्क हैं (डी मॉर्गन, 1865; मॉर्टन एंड बूथ, 1997)। एक पहुँच–योग्यता के बारे में है; विद्यालय में अपनी कम उपस्थिति, आवश्यक अभ्यास के लिए समय या अवसर की कमी, या समय पर वापस याद ला पाने की कमजोरी के कारण सभी छात्र–छात्राओं को याद रखने की तकनीक से लाभ नहीं मिलता। डिसलेक्सिया जैसी विशेष शैक्षणिक आवश्यकताओं वाले छात्र–छात्राओं को इससे बहुत नुकसान होता है।

एक अन्य तर्क इस बात पर चिंता व्यक्त करता है कि याद रखने की तकनीक से क्या–क्या याद रखा जा सकता है। याद रखने की तकनीक बोध पर केंद्रित नहीं है या समझ का निर्माण नहीं करती; न ही यह अवधारणाओं की गहराई से व्याख्या

का समर्थन करती है, और इस बात का भी नहीं कि किस प्रकार वे गणित के अन्य क्षेत्रों से संबंधित हैं। यह याद रखने और उनकी हू–ब–हू पुर्नप्रस्तुति पर केंद्रित है, जो कि किसी विषय के उन अधिक जटिल पहलुओं का अध्ययन करते समय समस्याप्रद हो सकता है (जैसे सूत्र या एल्गोरिथ्म) जिनमें कई चरण शामिल होते हैं। याद रखने से अर्थ की समझ नहीं आती, जिसका अर्थ है कि तत्व छूट जाते हैं, विवरण अव्यवस्थित हो जाते हैं, तनाव बढ़ जाता है और परीक्षा असफल हो सकती है।

याद रखते हुए सीखने का अनुभव अक्सर रोचक नहीं होता; इसे अपनी दोहराई जाने वाली प्रकृति और समझ व संबंध स्थापित करने पर ध्यान की कमी के कारण अरुचिकर भी माना जा सकता है। छात्र–छात्राएँ अभ्यासों को यांत्रिक रूप से 'पूरा' करते हैं, जिसमें उनके दिमाग का उपयोग कम से कम होता है। यह अच्छे अंक लाने वालों सहित सभी छात्र–छात्राओं के लिए समस्याप्रद होता है। गणित सीखते समय विरक्ति, चिंतन की बहुत कम आवश्यकता और संबंध स्थापित करने व गणित को अर्थ देने के कार्य के अवसर की कमी से यह विधि सीखने वालों के लिए विषय को समझना और उसका आनंद लेना कठिन बना देती है।

ज़रा सोचिए

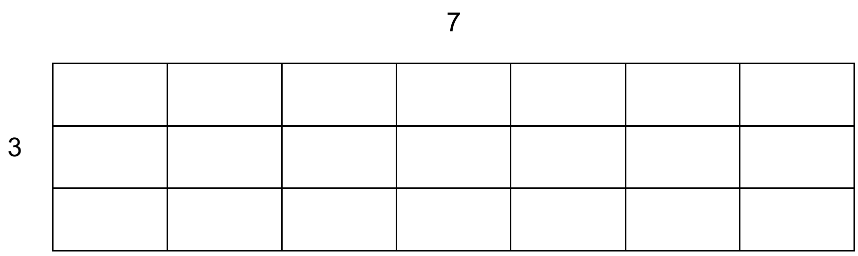
- याद रखने की तकनीक द्वारा सीखने के बारे में आपके क्या विचार हैं? क्या आपको लगता है कि यह हमेशा अच्छी तरह काम करती है, कभी–कभी करती है, या अक्सर नहीं करती?
- याद रखते हुए गणित सीखने का आपका अनुभव कैसा रहा?
- अपने किसी एक ऐसे छात्र–छात्रा के बारे में सोचें जो अच्छी तरह याद कर लेता है, और एक ऐसे छात्र–छात्रा के बारे में सोचें जिसे परेशानी होती है। उनके बारे में कौन सी बातें एक जैसी हैं और कौन सी बातें अलग–अलग?

2 बीजगणितीय सर्वसमिकाओं की समझ विकसित करने के लिए मानसिक चित्रण

मानसिक चित्रण सीखने के लिए स्मृति पर कम भरोसा करने का एक प्रभावी तरीका है। मानसिक चित्रण का मतलब है किसी चीज़ का चित्र अपने मन में देखना। अलग–अलग लोग चीज़ों को हमेशा एक ही नजर से नहीं 'देखेंगे', लेकिन 'दृश्य चिंतन' आपके छात्र–छात्राओं में समझ के निर्माण के लिए अत्यंत महत्वपूर्ण है (Dörfler, 1991)।

मानसिक चित्रण को अपेक्षाकृत रूप से सरल कार्यवाहियों द्वारा प्रस्तुत किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, गुणा को ऐसी गुणन तालिका के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है, जो कि क्षेत्रफल के समान हो। (गुणा को दर्शाने के अन्य तरीके भी हैं।)

7 × 3 के गुणनफल को सात गुणा तीन वर्गों के क्षेत्र द्वारा दिखाया जा सकता है (चित्र 1)। इस चित्र से यह भी स्पष्ट है कि गुणा विनिमेय होता है – अर्थात 7 × 3 का गुणनफल वही होता है जो 3 × 7 का होता है।



चित्र 1 योग 7 × 3 के लिए गुणन तालिका।

इसलिए 7 × 3 और 3 × 7 बराबर होता है, अर्थात् 21। इसे ऐसे लिखा जा सकता है:

7 × 3 ~ 3 × 7 ~ 21।

गुणा का प्रदर्शन आपके छात्र–छात्राओं की गुणा के किसी सवाल को समझने में मदद कर सकता है, क्योंकि किसी बड़े आयत के क्षेत्र को छोटे आयतों के क्षेत्रों में आसानी से अलग–अलग किया जा सकता है। उपयोग की गई संख्याओं के अनुपात में क्षेत्र मॉडल नहीं बनाना अच्छा होता है: यह अधिक अमूर्त प्रतिरूपणों को उभारता है और ऋणात्मक संख्याओं को दर्शाने के मानसिक विकास को कम कठिन बनाता है। चूँकि ऋणात्मक क्षेत्र बनाना संभव नहीं है, इसलिए इस प्रकार के निरूपण को 'गुणन तालिका' कहा जाता है।

उदाहरण के लिए, 24×13 को चित्र 2 में गुणन तालिका द्वारा दर्शाया जा सकता है। इस प्रकार $24 \times 13 \sim (20 + 4) \times (10 + 3) \sim 200 + 40 + 60 + 12 \sim 312$।

	20	4
10	200	40
3	60	12

चित्र 2 प्रश्न 24×13 के लिए गुणन तालिका।

एक अन्य उदाहरण में, 19^2 को चित्र 3 में गुणन तालिका द्वारा दर्शाया जा सकता है। इस प्रकार $19^2 \sim (20 - 1) \times (20 - 1) \sim 400 - 20 - 20 + 1 \sim 361$।

	20	−1
20	$20 \times 20 = 400$	$20 \times (-1) = -20$
−1	$20 \times (-1) = -20$	$(-1) \times (-1) = 1$

चित्र 3 प्रश्न 19^2 के लिए गुणन तालिका।

यह वियोजन मॉडल बड़ी संख्याओं के गुणनफल प्राप्त करने या बीजगणित वाले गुणा के लिए बहुत उपयोगी होता है। बीजगणित वाला एक साधारण उदाहरण $3(a - b)$ है, जैसा कि चित्र 4 में दिखाया गया है।
अतः $3(a - b) \sim 3a - 3b$।

	a	−b
3	$3 \times a = 3a$	$3 \times (-b) = -3b$

चित्र 4 $3(a - b)$ के लिए एक गुणन तालिका।

आपने ध्यान दिया होगा कि इन उदाहरणों में कभी–कभी बराबर के चिह्न (=) के स्थान पर समतुल्यता का चिह्न (~) उपयोग किया गया है, जो समान रूप से मान्य होगा। समतुल्यता का चिह्न गणित को कुछ स्वतंत्रताएँ, आनंद दे सकता है, विशेष रूप से जब चिह्न को 'बराबर है' के स्थान पर 'कहने का एक अन्य तरीका' के रूप में पढ़ा जाए।

$3(a-b) = 3a-3b$ को इस रूप में भी लिखा जा सकता है: $3(a-b) \sim 3a-3b$

$3(a-b) \approx$ को $Ka-Kb$ के रूप में नहीं लिखा जा सकता जब $K \neq 3$

उदाहरण:

1. दो जुड़वाँ बच्चे समतुल्य/समरूप हो सकते हैं पर आवश्यक नहीं है कि वे बराबर हों क्योंकि उनके भार में अन्तर हो सकता है।
2. पीपल के दो पत्ते समतुल्य हो सकते हैं लेकिन आवश्यक नहीं कि वे बराबर हो।

गुणा को गुणन तालिका के रूप में देखकर गतिविधि 1 छात्र–छात्राओं की मानसिक चित्रण में सहायता करेगी। इस इकाई में अपने छात्र–छात्राओं के साथ गतिविधियों के उपयोग का प्रयास करने के पहले अच्छा होगा कि आप सभी गतिविधियों को पूरी तरह (या आंशिक रूप से) स्वयं करके देखें। यह और भी बेहतर होगा यदि आप इसका प्रयास अपने किसी सहयोगी के साथ करें, क्योंकि जब आप अनुभव पर विचार करेंगे तो आपको मदद मिलेगी।

स्वयं प्रयास करने से आपको छात्र–छात्राओं के अनुभवों के भीतर झांकने का मौका मिलेगा, जो परोक्ष रूप से आपके सीखने–सिखाने की प्रक्रिया और एक शिक्षक के रूप में आपके अनुभवों को प्रभावित करेगा। जब आप तैयार हों, तो केस स्टडी 1 पढ़ें और अपने छात्र–छात्राओं के साथ गतिविधियों का उपयोग करें। पाठ के बाद, सोचें कि गतिविधि किस तरह हुई और उससे क्या सीख मिली। इससे आपको अधिक छात्र–छात्राओं को केंद्र में रखने वाला शैक्षिक वातावरण बनाने में मदद मिलेगी।

गतिविधि 1: गुणन तालिकाएँ बनाना

अपने छात्र–छात्राओं को बताएँ कि कई उदाहरण दिखाने वाली गुणन तालिकाओं को कैसे बनाएँ। मदद के लिए आप केस स्टडी 1 से विचारों का उपयोग कर सकते हैं।

फिर इन सवालों को बोर्ड पर लिखें:

- $(105)^2$
- $(14.3)^2$
- $4(99)$
- 98^2
- $7(t + r)$
- $(r + q)(s - r)$

इन सभी सवालों के लिए, अपने छात्र–छात्राओं से यह करने के लिए जोड़ी बनाकर काम करने को कहें:

a. सवाल को एक गुणन तालिका के रूप में मॉडल करें
b. यदि उपयुक्त हो, तो क्षेत्र को छोटे–छोटे क्षेत्रों में खंडित करें
c. (a) और (b) के अपने जवाबों का उपयोग करते हुए इन गणनाओं के गुणन पर काम करें।

पाठ के बाद, 'ज़रा सोचिए' में दिए संकेतों का उपयोग पाठ में अपने सीखने–सिखाने की प्रक्रिया का मूल्यांकन करने के लिए करें।

इस गतिविधि का उपयोग कक्षा IX के BTBC book के पाठः 2.4 शेषफल परिमेय, पृष्ठ 41 में पहले किया जा सकता है।

केस स्टडी 1: गतिविधि 1 के उपयोग का अनुभव श्रीमती अपराजिता बताती हैं

यह एक शिक्षिका की कहानी है, जिसने अपने माध्यमिक कक्षा के छात्र–छात्राओं के साथ गतिविधि 1 का प्रयास किया।

इस गतिविधि पर काम शुरू करने से पहले हमने इस बात पर चर्चा की कि किसी संख्या के वर्ग या गुणा को एक क्षेत्रफल मॉडल द्वारा कैसे दिखाया जा सकता है, उस तरीके की नकल करते हुए जो मैंने इस इकाई को पढ़कर सीखा है। मैंने 5 × 6 जैसी छोटी संख्याओं से शुरू किया और फिर 56 × 64 और 65 × 115 ली। अनूप ने प्रश्न 65 × 115 = 65(100 + 10 + 5) के लिए बंटन गुण का उपयोग करने का विचार किया, और इसलिए उसने इसपर आगे काम करते हुए इसे एक–गुणा–दो की तालिका द्वारा दिखाया [चित्र 5]।

	100	10	5
65	65 × 100 = 6,500	65 × 10 = 650	65 × 5 = 325

चित्र 5 सवाल 65 × 115 के लिए गुणन तालिका।

फिर हमने अन्य गुणा की समस्याएँ आजमाई। लगभग पूरा काम उन्होंने स्वयं ही किया, लेकिन थोड़ी–थोड़ी देर में मुझे वे अपने पड़ोसी के काम पर नजर डालते दिखाई दे रहे थे। उन्होंने अधिकांश काम अच्छे से कर लिया था। दशमलव के प्रश्न में, उनमें से अधिकांश ने इसे 14 + 0.3 के रूप में बंटित किया। मैंने उन्हें पूछा कि क्या अब उन्हें ये आसान लगता है, तो उनमें से कुछ ने कहा कि नहीं, तो मैंने उन्हें बताया कि वे तीन गुणा तीन की तालिका बनाने के लिए अधिक वियोजन पर विचार कर सकते हैं।

जब वे 98^2 पर आए, तो जिन लोगों ने 90 + 8 का फैसला किया था उन्हें कोई समस्या नहीं हुई, लेकिन जिन लोगों ने इसे 100 – 2 द्वारा दिखाने का फैसला किया था, वे जानना चाह रहे थे कि क्षेत्र ऋणात्मक कैसे हो सकता है। इस कारण गणित में निरूपण और मॉडलिंग पर एक जीवंत चर्चा हुई और इस बात पर भी कि विभिन्न लेबल लाने में यह क्यों मददगार हो सकता है। इस स्थिति में, किसी गुणन तालिका और क्षेत्र निरूपण के बीच भिन्नता और समानता। धनात्मक संख्याओं के साथ काम करते समय हमने अनुमान लगाया कि गुणन तालिका और क्षेत्र निरूपण समान होगा, लेकिन क्षेत्र मॉडल में आपको ऋणात्मक संख्याओं के साथ समस्याएँ आएँगी क्योंकि ऋणात्मक क्षेत्र वास्तव में होता ही नहीं। हालाँकि, हम जानते हैं कि गुणन ऋणात्मक हो सकता है, इसलिए हम इसे गुणन तालिका क्यों कहें!

मैं स्वयं 100 – 2 निरूपण में अधिक गहराई में नहीं गई, क्योंकि इससे इस इकाई के दूसरे भाग पर अच्छी चर्चा हुईः किसी गुणन तालिका में ऋणात्मक संख्याओं पर कैसे काम करें।

ज़रा सोचिए

पाठ के बाद विचार करने के लिए कुछ अच्छे प्रश्न हैं:

- आपकी कक्षा कैसी रही?
- छात्र–छात्राओं से किस प्रकार की प्रतिक्रिया अपेक्षित नहीं थी? क्यों?
- अपने छात्र–छात्राओं की समझ का पता लगाने के लिए आपने क्या सवाल किए?
- क्या आपको लगा कि आपको किसी समय हस्तक्षेप करना होगा?
- किन बिंदुओं पर आपको लगा कि आपको और समझाना होगा?
- क्या आपने किसी भी रूप में काम को संशोधित किया? यदि ऐसा है, तो आपने ऐसा किस कारण से किया?

3 बीजगणितीय सर्वसमिकाओं को गुणन की विशेष स्थितियों के रूप में देखा जाता है

छात्र–छात्राएँ बीजगणितीय सर्वसमिकाओं को अक्सर कोई जादू या यथार्थ सत्य समझ लेते हैं। शायद ही उन्हें इस बात का बोध होता है कि ये सर्वसमिकाएँ कहाँ से आती हैं या यह कि वे गुणन की विशेष परिस्थितियाँ हैं।

सर्वसमिकाओं को याद करने की छात्र–छात्राओं की आदत का एक कारण यह है कि वे सर्वसमिका द्वारा चित्रित संबंध के साथ कोई अर्थ स्थापित करने में विफल रहते हैं। आपने ध्यान दिया होगा कि छात्र–छात्राएँ निम्न प्रकार के सर्वसमिकाओं को याद करते समय सामान्य त्रुटियाँ करते हैं:

$$(x - y)^2 = x^2 - y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 + 2\,xy - y^2$$

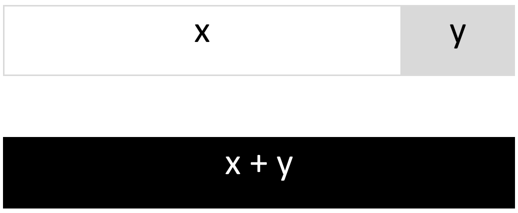
भले ही यह देखना बहुत ही सरल है कि क्या दो कथन सही हैं (बस उन्हें चरों के कुछ मानों को सत्यापित करना होता है), छात्र ये गलतियाँ करना जारी रखते हैं। कभी–कभी छात्र इस बात से अनजान रहते हैं कि वे अपने कथनों को कितनी आसानी से सत्यापित कर सकते हैं। एक अन्य और अधिक गंभीर कारण यह है कि उन्होंने कभी भी इन कथनों के भौतिक (या ज्यामितीय) अर्थ को नहीं समझा।

इन सर्वसमिकाओं को समझने में अपने छात्र–छात्राओं की मदद करने के लिए आप पिछले अनुभाग में बताई गई मानसिक चित्रण तकनीकों का उपयोग कर सकते हैं। गतिविधि 2 आपको अपने छात्र–छात्राओं की भिन्न–भिन्न सर्वसमिकाओं का मतलब स्वयं पता करने में मदद करने की विधि बताती है। यह काम बीजगणितीय सर्वसमिकाओं के ढाँचा (pattern) का पता लगाने, देखने और सामान्यीकृत करने पर केंद्रित है। अपनी समझ विकसित करने में मदद पाने के विचारों के बारे में बात करते समय छात्र किसी भागीदार के साथ काम करते हैं।

यह गतिविधि शुरू करने से पहले, यह पता कर लेना अच्छा होगा कि क्या आपके छात्र $x + y$ और $x - y$ की लंबाइयों को सही रूप में चित्रित कर लेते हैं। पहले वाले को समझना आसान है जबकि दूसरे वाले में थोड़ी अधिक मेहनत लगती है।

लंबाई '$x + y$' का चित्रण

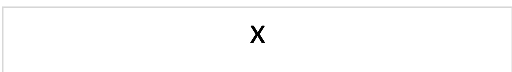
यदि सफेद भाग x है, और छायांकित भाग y है, तो काला भाग $x + y$ है। इसे 'छायांकित भाग (y को दिखाने वाला) की लंबाई में सफेद भाग (x को दिखाने वाला) की जोड़ी गई लंबाई वही है जो काले भाग ($x + y$ को दिखाने वाला) की है' (चित्र 6 देखें)।



चित्र 6 $x + y$ की लंबाई को दिखाना।

'$x - y$' की लंबाई को दिखाना

यदि सफेद भाग x है और छायांकित भाग y है, तो काला भाग $x - y$ है। इसे इस रूप में भी बताया जा सकता है कि 'सफेद भाग (x को दिखाने वाला) की लंबाई में से धूसर भाग (y को दिखाने वाला) को निकालने पर काला भाग ($x - y$ को दिखाने वाला) बचता है' (चित्र 7 देखें)।



चित्र 7 x – y को दिखाना।

गतिविधि 2: बीजगणितीय गुणनफल (Multiplication) की विशेष स्थितियों के रूप में बीजगणितीय सर्वसमिकाएँ
अपने छात्र–छात्राओं को निम्न बताएँ: 1. अपने पड़ोसी को एक गुणन तालिका के रूप में निम्न गणितीय व्यंजक बताएँ (आरेखित न करें या करके न बताएँ)। यह कैसा दिखाई देगा? a. $(x + y)^2$ b. $(x + a)(x + b)$ c. $(x - y)^2$ d. $(x - y)(x + y)$ 2. अब प्रत्येक व्यंजक का आरेख द्वारा निरूपण करें जिसे आप चरण 1 में गुणन तालिका से बताये हैं। 3. क्षेत्रों को निरूपित करने वाले गणितीय व्यंजकों को लिखने की कोशिश करें जिसे आपने चरण 2 में अलग तरह से आरेखित किया है। 4. निम्न चार अभिव्यक्तियों में से प्रत्येक के लिए चरण 1, 2 और 3 के अपने उत्तरों का अवलोकन करें और उनकी तुलना करें: ○ चरण 3 में आपको व्यंजक (a), (b), (c) और (d) के लिए कितने पद मिले? ○ ये पद किस तरह बने हैं? ○ इन व्यंजकों में क्या समानता है? क्या अलग है? पदों के संगत क्षेत्र बॉक्स में रंग भरना मददगार हो सकता है। ○ इस तरीके से बीजगणितीय सर्वसमिका निकालने के नियम या विधि की व्याख्या करें, ताकि अन्य कक्षाओं के अन्य छात्र इस बारे में पढ़ सकें।

	इस गतिविधि का उपयोग कक्षा IX के BTBC book के पाठ: 2.6 बीजीय सर्वसमिकाएँ, पृष्ठ 52 में पहले किया जा सकता है।

केस स्टडी 2: गतिविधि 2 के उपयोग का अनुभव श्रीमती किरण बताती हैं

चूँकि मुझे लगता था कि कुछ छात्र–छात्राएँ ऐसे होंगे, जिन्हें संख्या से बीजगणित पर जाने में परेशानी होगी, इसलिए हमने पहले प्रश्न, $(x + y)^2$, को एक पूरी कक्षा की गतिविधि के रूप में किया। गतिविधि 1 में छात्र–छात्राओं द्वारा पहले ही गुणन तालिकाएँ बना लिए जाने के कारण, छात्र चरण 1 और 2 को काफी आसानी से कर पाए।

चरण 3 के कारण समतुल्यता के महत्व के बारे में एक चर्चा हुई। संकलित पदों वाला कोई व्यंजक उस व्यंजक के बराबर हो सकता है, जहाँ पदों को अभी तक संकलित नहीं किया गया है – यह केवल थोड़ा अधिक उलझनभरा दिखाई ही देता है। मैंने उनसे पूछा कि क्या वे इसे और भी अधिक उलझनभरा दिखाने के लिए कोई विचार दे सकते हैं, तो उनके पास कई विचार थे! इस पर हम सभी को हँसी आई, जो बहुत अच्छी बात थी, विशेष रूप से उन छात्र–छात्राओं के लिए, जो सामान्य तौर पर चुपचाप रहते हैं और जिनके मन में गणित को लेकर कुछ उत्सुकता होती है, वे भी मुस्कुराए और अधिक सहज दिखाई दिए।

चरण 4 का अंतिम भाग कठिन साबित हुआ। कठिनाई इसे समझाने में नहीं थी, बल्कि ऐसा संक्षेप में करने में थी।

जिन वर्णनों के साथ हमने समापन किया वे बिल्कुल सही नहीं थे, लेकिन छात्र–छात्राएँ और मैं उनसे खुश थे। हम सबने महसूस किया कि बेहतर बनने के लिए हमें स्वयं के वर्णन और विधियाँ लिखने का और अभ्यास करने की आवश्यकता है।

हमने $(a + b + c)^2$ को शामिल करने के लिए प्रश्नों का विस्तार किया और पदों को विभिन्न चिह्न देकर प्रयास किया, और उन्हें आसानी से समाधान प्राप्त हो गए।

हमने यह भी तय किया कि $(a + b)^3$ या $(a - b)^3$ करने के लिए हम इसे दो भागों में कर सकते हैं, $(a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$, और फिर इसे गुणन तालिका में रख सकते हैं।

छात्र–छात्राओं को बहुत खुशी हुई और उनमें इस तरह से काम करने का आत्मविश्वास जागा। एक छात्र ने कहा कि वह इतना चिंतामुक्त हो गया है कि वह अब अपनी याददाश्त विफल हो जाने पर बीजगणितीय सर्वसमिका को हल करके पता कर लेगा।

ज़रा सोचिए

पाठ के बाद विचार करने के लिए कुछ अच्छे प्रश्न हैं:

- आपकी कक्षा कैसी रही?
- क्या सभी छात्र–छात्राओं ने भाग लिया? या आपने कुछ ऐसे छात्र देखे जो इस काम में भाग नहीं ले रहे थे? आपने उन्हें अगले पाठ से कैसे जोड़ा?
- छात्र–छात्राओं से किस प्रकार की प्रतिक्रिया अपेक्षित नहीं थी? क्यों?
- अपने छात्र–छात्राओं की समझ का पता लगाने के लिए आपने क्या सवाल किए?
- क्या आपने किसी भी रूप में काम को संशोधित किया? यदि ऐसा है, तो आपने ऐसा किस कारण से किया?

4 ढाँचा (pattern) पता करना और बीजगणितीय सर्वसमिकाओं को समायोजित करना

गतिविधि 2 में, आपने अपने छात्र–छात्राओं के साथ गुणन और बीजगणितीय सर्वसमिकाओं के image का विकास करने पर काम किया। आपके छात्र अब गुणन और बीजगणितीय सर्वसमिकाओं के गुणनफल को प्राप्त करने के लिए सूत्र और एल्गोरिथम याद करने के बजाय उन्हें हल करके निकालने की विधियों से परिचित होंगे।

गणित में बीजगणितीय सर्वसमिकाओं को समझने की शक्ति न केवल उनके गुणनफल निकालने में सक्षम होना है, बल्कि (और शायद अधिक महत्वपूर्ण रूप से) इस बात में भी है कि जब वे आसानी से पहचाने जाने वाले रूप में न हो, तो उन्हें पहचानने में सक्षम हों। व्यंजकों को 'बदलने' में सक्षम होना, ताकि उन्हें बीजगणितीय सर्वसमिकाओं के विभिन्न रूप में लिखा जा सके, यह एक अत्यंत सशक्त कौशल है।

गतिविधि 3 इस बात पर केंद्रित है। इसमें छात्र–छात्राओं को बीजगणितीय सर्वसमिकाओं के संदर्भ में ढाँचा (pattern) पहचानने और व्यंजकों में फेरबदल करने के तरीके सक्रिय रूप से विकसित करने की आवश्यकता होती है।

गतिविधि 3: प्रतिमान पहचानना

यह बीजगणितीय सर्वसमिकाओं के संदर्भ में प्रतिमान पहचानने और गणितीय व्यंजकों में फेरबदल करने से संबंधित गतिविधि है।

अपने छात्र–छात्राओं से यह तय करने को कहें कि क्या नीचे दी गई हर गणना 'बीजगणितीय सर्वसमिका' का एक उदाहरण है। वे अपनी पाठ्यपुस्तक में इन्हें देख सकते हैं:

- $5.6^2 - 0.3^2 = 31.27$
- $(x - 3)(x + 5) = x^2 + 2x - 15$
- $118 \times 123 = 14\ 514$
- $25/4x^2 - y^2/9 = (5/2x + y/3)(5/2x - y/3)$

इस गतिविधि का उपयोग कक्षा IX के BTBC book के पाठः 2.6 बीजीय सर्वसमिकाएँ, पृष्ठ 52 में पहले किया जा सकता है।

केस स्टडी 3: गतिविधि 3 के उपयोग का अनुभव श्रीमती अंजु बताती हैं

मैंने अपने छात्र–छात्राओं से बीजगणितीय गतिविधियों पर ध्यान देने के लिए कहा, ताकि उन्हें याद आ जाए कि वे किस बारे में हैं। उसके बाद, छात्र–छात्राओं ने दिए गए प्रश्नों को खुशी–खुशी सर्वसमिकाओं के साथ तुलना करना शुरू कर दिया। पहले वाले के लिए उन्होंने सही सर्वसमिका पहचाना, लेकिन सुमन और कुछ अन्य ने इसे $5.6^2 - 0.3^2 = (5.6^2 - 0.3^2)(5.6^2 + 0.3^2)$ के रूप में लिखा। मैंने सोचा कि उसकी गलती को अन्य छात्र–छात्राओं को बताना अच्छा होगा, ताकि वे सभी उसकी इस गलती से सीख ले सकें। इसलिए मैंने उसे बुलाया और ब्लैकबोर्ड पर इसे लिखने को कहा। एक बार, रवि ने पूछा 'ऐसा कैसे हो सकता है कि दाईं ओर [RHS] हमारे पास वही अभिव्यक्ति है, लेकिन फिर इसे दूसरे से गुणा किया जाता है?' सुमन ने अपना काम तुरंत देखा और RHS के सूचकांक मिटा दिए, जिससे सही उत्तर मिला।

दूसरा वाला काफी आसानी से हो गया लेकिन तीसरे वाले के लिए कुछ बच्चों ने इसे 100 + 18 और 100 + 23 के रूप में अलग–अलग किया। इससे यह चर्चा निकली कि क्या वह पर्याप्त और आसान था या इसे सरल बनाने का कोई और तरीका भी था। मुझे यह पसंद आया कि छात्र–छात्रा उत्तर प्राप्त करने के अलग–अलग तरीकों के बारे में सोच रहे थे।

कुछ छात्र–छात्राएँ आखिरी वाले को $(5/4x - y/9)(5/4x + y/9)$ के रूप में लिखना चाह रहे थे। इस सुझाव में सही और गलत क्या था, इस बात पर भी काफी चर्चा हुई। फिर मैंने उन्हें अपनी पाठ ्यपुस्तक निकालने को कहा, 'अभ्यास करने' के लिए नहीं बल्कि यह देखने के लिए कि क्या वे अब उन सर्वसमिकाओं को आसानी से पहचान सकते हैं, जिन्हें उन्हें उपयोग करना है।

वीडियोः प्रगति और कार्यप्रदर्शन का आकलन करना

आप मुख्य संसाधन 'प्रगति और कार्यप्रदर्शन का आकलन करना' पर भी एक नजर डालना चाह सकते हैं।

ज़रा सोचिए

पाठ के बाद विचार करने के लिए कुछ अच्छे प्रश्न हैं:

- छात्र–छात्राओं से किस प्रकार की प्रतिक्रिया अपेक्षित नहीं थी? क्यों?

- अपने छात्र–छात्राओं की समझ का पता लगाने के लिए आपने क्या सवाल किए?
- क्या आपने किसी भी रूप में काम को संशोधित किया? यदि ऐसा है, तो आपने ऐसा किस कारण से किया?

5 सारांश

यह इकाई जटिल व्यंजकों के साथ काम करना सुगम बनाने के लिए चित्रीय निरूपणों का उपयोग करने पर केंद्रित है। जब एक बार आपके छात्र–छात्राएँ क्षेत्र गणनाओं और विस्तार कोष्ठकों के बीच का संबंध समझ लेते हैं, तो उन्हें अपनी याददाश्त पर भरोसा करने के बजाय उन्हें हल करके पता करने का एक तरीका मिल जाता है। ये विचार छात्र–छात्राओं को अपने काम को एक अर्थ देने में सक्षम बनाते हैं और इसलिए उन्हें महसूस होता है कि ये विचार उनके अपने हैं।

इससे यह भी पता चलता है कि छात्र यह पूछते हुए इन विचारों के साथ खेलते हैं कि 'क्या होगा यदि इसे इस तरीके के बजाय दूसरे तरीके से किया जाए, या इसे कम के बजाय अधिक जटिल बनाया जाए?' इससे याददाश्त की आवश्यकता वाली कुछ चिंताओं से मुक्ति मिलती है और छात्र–छात्राओं को सीखी गई बातें अधिक आसानी से याद रखने में मदद मिलती है। यह महत्वपूर्ण है क्योंकि जब छात्र–छात्राएँ याददाश्त से सर्वसमिकाओं को पुनः तैयार कर सकते हैं, तो वे गणितीय समस्याओं को अधिक सरलता से हल कर सकते हैं। लेकिन अक्सर वे याददाश्त के बारे में बहुत चिंतित होते हैं, वे ऐसी सरलता नहीं ला पाते।

ज़रा सोचिए

इस इकाई में आपके द्वारा उपयोग किए गए तीन विचार पहचानें जो अन्य विषयों को पढ़ाने में भी काम करेंगे। उन दो विषयों पर एक नोट बनाएँ जो आपको शीघ्र ही पढ़ाने हैं, जहाँ थोड़े से बदलाव के साथ उन विचारों का उपयोग किया जा सकता है।

संसाधन

संसाधन 1: NCF/NCFTE शिक्षण आवश्यकताएं

यह इकाई NCF (2005) तथा NCFTE (2009) की निम्न शिक्षण आवश्यकताओं से जोड़ता है तथा उन आवश्यकताओं को पूरा करने में आपकी मदद करेगाः

- छात्र–छात्राओं को गणित को सूत्रों और यांत्रिक प्रक्रियाओं से परे देखने दें।
- शिक्षार्थियों को उनके सीखने की प्रक्रिया में सक्रिय प्रतिभागी के रूप में देखें न कि सिर्फ ज्ञान प्राप्त करने वाले के रूप में; ज्ञान निर्माण के लिए उनकी क्षमताओं को प्रोत्साहित करें; रोट (रटना) पद्धतियों से शिक्षण को दूर ले जाएँ।
- पाठ्यचर्या, पाठ्यक्रम और पाठ्यपुस्तकों से उनका आलोचनात्मक परीक्षण करते हुए जुड़ें, न कि बिना प्रश्न किए उन्हें 'दिया गया' और स्वीकृत मान लें।
- संबंध स्थापित करने, संरचनाएँ देखने, समस्याओं का पता लगाने, कथनों की सत्यता या असत्यता पर तर्क देने के लिए छात्र–छात्राओं को अमूर्त कल्पनाओं का उपयोग करने दें।

अतिरिक्त संसाधन

- A newly developed maths portal by the Karnataka government: http://karnatakaeducation.org.in/KOER/en/index.php/Portal:Mathematics
- Class X maths study material: http://www.zietmysore.org/stud_mats/X/maths.pdf
- National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics: https://www.ncetm.org.uk/
- National STEM Centre: http://www.nationalstemcentre.org.uk/
- OpenLearn: http://www.open.edu/openlearn/

- BBC Bitesize: http://www.bbc.co.uk/bitesize/
- Khan Academy's math section: https://www.khanacademy.org/math
- NRICH: http://nrich.maths.org/frontpage
- Mathcelebration: http://www.mathcelebration.com/
- Art of Problem Solving's resources page: http://www.artofproblemsolving.com/Resources/index.php
- Teachnology: http://www.teach-nology.com/worksheets/math/
- Maths is Fun: http://www.mathsisfun.com/
- National Council of Educational Research and Training's textbooks for teaching mathematics and for teacher training of mathematics: http://www.ncert.nic.in/ncerts/textbook/textbook.htm
- AMT-01 *Aspects of Teaching Primary School Mathematics*, Block 3 ('Numbers (II)'): http://www.ignou4ublog.com/2013/06/ignou-amt-01-study-materialbooks.html
- LMT-01 *Learning Mathematics*, Block 1 ('Approaches to Learning') Block 2 ('Encouraging Learning in the Classroom'), Block 6 ('Thinking Mathematically'): http://www.ignou4ublog.com/2013/06/ignou-lmt-01-study-materialbooks.html
- *Learning Curve* and *At Right Angles*, periodicals about mathematics and its teaching: http://azimpremjifoundation.org/Foundation_Publications
- Central Board of Secondary Education's books and support material (also including the *Teachers Manual for Formative Assessment – Mathematics (Class IX)*) – select 'CBSE publications', then 'Books and support material': http://cbse.nic.in/welcome.htm

संदर्भ/संदर्भग्रंथ सूची

De Morgan, A. (1865) 'A speech of Professor De Morgan, President, at the first meeting of the London Mathematical Society', *Proceedings of the London Mathematical Society, Vol.1* (1866), pp. 1–9.

Dörfler, W. (1991) 'Meaning: image schemata and protocols – plenary lecture', in Furinghetti, F. (ed.) *Proceedings of PME XV, Vol. I*, pp. 95–126.

Marton, F. and Booth, S. (1997) *Learning and Awareness*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

National Council of Educational Research and Training (2005) *National Curriculum Framework* (NCF). New Delhi: NCERT.

National Council of Educational Research and Training (2009) *National Curriculum Framework for Teacher Education* (NCFTE). New Delhi: NCERT.

National Council of Educational Research and Training (2012a) *Mathematics Textbook for Class IX*. New Delhi: NCERT.

National Council of Educational Research and Training (2012b) *Mathematics Textbook for Class X*. New Delhi: NCERT.

Skemp, R. (1976) 'Relational understanding and instrumental understanding', *Mathematics Teaching*, vol. 77, pp. 20–26.

Van Hiele, P. (1986) *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. Orlando, FL: Academic Press.

Watson, A., Jones, K. and Pratt, D. (2013) *Key Ideas in Teaching Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

अभिस्वीकृतियाँ

यह सामग्री क्रिएटिव कॉमन्स एट्रिब्यूशन–शेयरएलाइक लाइसेंस (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/) के अंतर्गत उपलब्ध कराई गई है, जब तक कि अन्यथा निर्धारित न किया गया हो। यह लाइसेंस TESS-India, OU और UKAID लोगो के उपयोग को वर्जित करता है, जिनका उपयोग केवल TESS-India परियोजना के भीतर अपरिवर्तित रूप से किया जा सकता है।

कॉपीराइट के स्वामियों से संपर्क करने का हर प्रयास किया गया है। यदि किसी को अनजाने में अनदेखा कर दिया गया है, तो पहला अवसर मिलते ही प्रकाशकों को आवश्यक व्यवस्थाएं करने में हर्ष होगा।

वीडियो (वीडियो स्टिल्स सहित): भारत भर के उन शिक्षक प्रशिक्षकों, प्रधानाध्यापकों, शिक्षकों और छात्र–छात्राओं के प्रति आभार प्रकट किया जाता है जिन्होंने उत्पादनों में दि ओपन यूनिवर्सिटी के साथ काम किया है।