গাণিতিক কারণ বিশ্লেষণের দক্ষতার বিকাশ: গাণিতিক প্রমাণ

Developing mathematical reasoning: mathematical proof

ভারতে বিদ্যালয় ভিত্তিক সহায়তার ভিত্তিতে শিক্ষকের জন্য শিক্ষা

www.TESS-India.edu.in

http://creativecommons.org/licenses/

TESS-ইন্ডিয়া (টিচার এডুকেশন থ্রু স্কুল বেসড সাপোর্ট)-এর লক্ষ্য হল শিক্ষার্থী-কেন্দ্রিক, অংশগ্রহণমূলক পদক্ষেপের উন্নতিতে শিক্ষকদের সহায়তা করার জন্য ওপেন এডুকেশনাল রিসোর্সেস (OERs)-এর সম্পদগুলির মাধ্যমে ভারতের প্রাথমিক এবং মাধ্যমিক শিক্ষকদের শ্রেণিকক্ষের রীতিগুলিকে উন্নত করা। TESS-ইন্ডিয়া OERs শিক্ষকদের স্কুলের পাঠ্যবইয়ের সহায়িকা প্রদান করে। এগুলি শিক্ষকদেরকে তাঁদের শিক্ষার্থীদের সঙ্গে শ্রেণিকক্ষে পরখ করে দেখার জন্য অ্যাক্টিভিটি প্রদান করে, আর একই সাথে কিছু কেস স্টাডি প্রদান করে যেগুলি দেখায় যে অন্য শিক্ষকরা কীভাবে বিষয়টি পড়িয়েছেন এবং সম্পদগুলির মধ্যে যোগসূত্র স্থাপন করেছে যাতে শিক্ষকদেরকে তাঁদের পাঠের পরিকল্পনা ও বিষয়জ্ঞানকে উন্নত করতে সাহায্য করা যায়।

ভারতীয় পাঠ্যক্রম এবং প্রসঙ্গগুলির জন্য TESS-ইন্ডিয়া OERs সহযোগীতামূলক ভাবে ভারতীয় এবং আর্ন্তজাতিক লেখকদের দ্বারা লেখা হয়েছে এবং এটি অনলাইনে এবং ছাপার ব্যবহারের জন্য উপলব্ধ আছে (http://www.tess-india.edu.in/) / OERs অনেক সংস্করণে পাওয়া যায়, এগুলি ভারতের প্রত্যেক অংশগ্রহণকারী রাজ্যের জন্য উপযুক্ত এবং স্থানীয় প্রয়োজনীয়তা এবং প্রসঙ্গ পূরণ করতে OERsকে ব্যবহারকারীদের গ্রহণ এবং স্থানীয় ভাষায় অনুবাদ করতে আমন্ত্রণ করা হয়।

TESS-ইন্ডিয়া দি ওপেন ইউনির্ভাসিটি UK দ্বারা পরিচালিত এবং UK সরকার আর্থিক বিনিয়োগ করেছে।

ভিডিও সম্পদসমূহ

এই ইউনিটে কিছু কার্যক্রমের সঙ্গে নিম্নলিখিত আইকনগুলি আছে: */ এর অর্থ হল যে নির্দিষ্ট শিক্ষাদান সংক্রান্ত থিমের জন্য TESS-ইন্ডিয়া ভিডিও সম্পদসমূহ দেখা আপনার পক্ষে সহায়ক হবে।*

TESS-ইন্ডিয়া ভিডিও সম্পদসমূহ ভারতের ক্লাসঘরের বিবিধ প্রকারের পরিপ্রেক্ষিতে মূল শিক্ষাদানসংক্রান্ত কৌশলগুলি চিত্রিত করে। আমরা আশা করি সেগুলি আপনাকে অনুরূপ চর্চা নিয়ে পরীক্ষা করতে সাহায্য করবে। সেগুলির উদ্দেশ্য হল পাঠ্যভিত্তিক ইউনিটের মাধ্যমে আপনার কাজের অভিজ্ঞতা বাড়ানো ও পরিপূর্ণ করা, কিন্তু আপনি যদি সেগুলি পেতে অসমর্থ হন, সেই ক্ষেত্রে এগুলি অপরিহার্য নয়।

TESS-ইন্ডিয়া ভিডিও সম্পদগুলি অনলাইনে দেখা যায় বা TESS-ইন্ডিয়া ওয়েবসাইট, (http://www.tess-india.edu.in/) থেকে ডাউনলোড করা যায়। অন্যথায় আপনি একটি সিডি বা মেমরি কার্ডে ভিডিওগুলি পেতে পারেন।

সংস্কণর 1.0   SM02v1
West Bengal

তৃতীয়   শ্লক্ষর উ াদান্গুলি বা অন্যর্থায় বর্ণিত ন্া হশ্লল এই সামগ্রীর্ণ একর্ণ ক্রিশ্লয়র্ণভ কমন্স অ্যাট্রিবিউশ ন্-শেয়ারঅ্যালাইক লাইশ্লসশ্লন্সর অধ্ীশ্লন্ উ লব্দ: http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/

TESS-India is led by The Open University UK and funded by UK aid from the UK government

এই ইউনিটের বিষয়বস্তু

গাণিতিক প্রমাণকে প্রায়শই গণিতের ভিত্তি প্রস্তরগুলির মধ্যে একটি হিসাবে বিবেচনা করা হয়। পেশাদার গণিতজ্ঞরা অনুমান তৈরি করতে অনেক সময় ব্যয় করেন। পরবর্তীতে সেগুলি সমস্ত ক্ষেত্রেই সত্য, না কয়েকটি ক্ষেত্রে বা কোনও ক্ষেত্রেই সত্য নয় তা নির্ধারণ করেন। প্রমাণ এবং যৌক্তিকতাগুলিকে শক্তিশালী হতে হবে এবং জ্ঞাত গাণিতিক তথ্য এবং বৈশিষ্ট্যের ভিত্তিতে হতে হবে। গানিতিক প্রমাণ এবং গাণিতিক ধারণাগুলির সংযোগের এই প্রক্রিয়াগুলির মাধ্যমে গণিত সম্পর্কে বোধ এবং জ্ঞানের পরীক্ষা হয় এবং ধারণাগুলি গঠিত হয়।

শিক্ষার্থীদের নিযুক্ত করে গণিত সম্পর্কে একটি বোধ বিকাশের উদ্দেশ্যে প্রমাণকরণটি শ্রেণিকক্ষে সম্পাদন করা একটি উৎকৃষ্ট কার্যধারা হতে পারে। কিন্তু বিদ্যালয়ের গণিতের ক্ষেত্রে প্রায়শই প্রমাণকরণকে ছাত্রদের দ্বারা একটি মুখস্থ করে শিক্ষণীয় বিষয় বলে মনে করা হয়। এই পদ্ধতিটি কেবল এই বিষয়টির উপরই পুনরায় জোর দেয় যে, গণিত হল অন্তর দিয়ে শেখার বিষয় যদিও প্রমাণের ধারণার উদ্দেশ্যটি প্রায়শই পরিষ্কার হয় না।

এই ইউনিটে আপনি গাণিতিক প্রমাণ এবং আপনার শিক্ষার্থীদের গভীর গাণিতিক বোধের বিকাশের ক্ষেত্রে এটিকে কীভাবে ব্যবহার করা যায় সে সম্পর্কে চিন্তা করবেন। আপনার শিক্ষার্থীদের মৌখিক বিশ্লেষণের ক্ষেত্রে আরও সাবলীল করতে ও আলোচনাগুলি থেকে তারা আরো কার্যকর ভাবে কীভাবে শিখতে পারে সে কাজে সহায়তা করার বিষয়টি আপনি শিখবেন।

এই ইউনিটে আপনি কী শিখতে পারেন

- কীভাবে শিক্ষার্থীদের তাদের গাণিতিক চিন্তা ভাবনার প্রক্রিয়াগুলি বর্ণনা এবং প্রকাশ করতে সক্ষম করে তুলবেন।
- কথা বলার মাধ্যমে শেখার বিষয়ে শিক্ষার্থীদের কীভাবে সুবিধা করে দেবেন।
- প্রমাণকরণ শিক্ষায় অর্জনের বিভিন্ন স্তরের মোকাবিলার উদ্দেশ্যে কিছু পরামর্শ।

এই ইউনিটটি সম্পদ 1-এ আলোচিত NCF (2005) এবং NCFTE (2009)-এর শিক্ষাদানের পদ্ধতিগুলির সঙ্গে যোগসূত্র স্থাপন করে।

1 কেন স্কুলে গাণিতিক প্রমাণ শেখাবেন?

গাণিতিক প্রমাণ স্কুলের পাঠ্যক্রমের অংশ হওয়া উচিত কিনা সে সম্পর্কে বিশ্ব জুড়ে অনেক আলোচনা হয়। শিক্ষকরা প্রায়শই প্রমাণ শিক্ষণে এবং শিক্ষার্থীরা প্রায়শই এটি শেখার ক্ষেত্রে কঠোর পরিশ্রম করে। প্রমাণ নিয়ে কাজ করার মাধ্যমে গাণিতিক শিক্ষার কোন বিষয়টি তুলে ধরা হয় তা সর্বদা পরিষ্কার নয়। কয়েকটি দেশ গাণিতিক প্রমাণের শিক্ষণকে সম্পূর্ণরূপে বর্জন করেছে। যদিও অন্যেরা গাণিতিক বিশ্লেষণ হিসাবে এটির প্রতি আরও দৃষ্টি নিবদ্ধ করে। ভারতে গাণিতিক প্রমাণ এখনও স্কুলের পাঠ্যক্রমে বহুলভাবে প্রচলিত। নবম ও দশম শ্রেণির পাঠ্যপুস্তকের অনেকগুলি অধ্যায়ে গাণিতিক প্রমাণ অন্তর্ভুক্ত আছে।

স্কুলে গাণিতিক প্রমাণ অনুশীলনের থেকে অর্জিত গাণিতিক ভাবনা শেখার মধ্যে অনেক ইতিবাচক দিক রয়েছে। গবেষকদের মতে, গাণিতিক প্রমাণ নিয়ে কাজ করা গণিত শিক্ষণের উদ্দেশ্যে বহু সুযোগ প্রদান করে। হান্না (2000) এটিকে এভাবে সারসংক্ষেপ করেছেন:

- একটি বক্তব্যের সত্যতার **যাচাইকরণ**
- এটি কেন সত্য তাতে **অন্তর্দৃষ্টি** দিয়ে ব্যাখ্যাকরুন
- স্বীকার্যগুলি, বৃহৎ ধারণা এবং উপপাদ্যগুলির একটি অবরোহী পদ্ধতিতে বিবিধ ফলাফলকে সংগঠিত করে তৈরি

- নতুন ফলাফল **আবিষ্কার** বা উদ্ভাবন
- গাণিতিক জ্ঞান সংবহন করতে **যোগাযোগ**
- একটি পরীক্ষালব্ধ **তত্ত্বের গঠন**
- কোনও সংজ্ঞার অর্থ অথবা কোনও অনুমানের ফলাফল **অনুসন্ধান**
- কোনও একটি সুপরিচিত তথ্যকে একটি নতুন কাঠামোর **অন্তর্ভুক্তিকরণ** এবং এভাবে এটিকে কোনও একটি নতুন দৃষ্টিভঙ্গী থেকে দেখা।

কীভাবে গাণিতিক প্রমাণের প্রক্রিয়া শিক্ষার্থীদের গণিত অনুধাবনে একটি উপায় হিসাবে ব্যবহার করা যায়, উপরোক্ত শেখার সুযোগগুলিতে কাজ করে এই ইউনিটটি তা প্রমাণ করবে এবং পরামর্শ দেবে।

চিন্তার জন্য সাময়িক বিরতি

স্কুলের পাঠ্যক্রমে গাণিতিক প্রমাণ সম্পর্কে আপনার চিন্তাভাবনা এবং মতামতগুলি কী কী? এগুলি কি সেখানে থাকা উচিত?

আপনি কি এই গবেষকদের প্রস্তাবিত শেখার সুযোগগুলির তালিকাটি সম্পর্কে সহমত? আপনি কোনগুলি সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ হিসাবে বিবেচনা করেন? এ জাতীয় গাণিতিক শিক্ষা কি বর্তমানে আপনার শ্রেণিকক্ষে দেওয়া হয়? যদি তাই হয়, তবে আপনি এটি কীভাবে করেন? যদি তা না হয়, তবে আপনি আপনার বর্তমান অনুশীলনে কী পরিবর্তন চান সে সম্পর্কে কি কোনও ধারণা রয়েছে?

2 এটি কি প্রমাণ?

গাণিতিক প্রমাণ বিজ্ঞান এবং আইনের মতো বিষয়গুলির থেকে পৃথক। কারণ যুক্তির প্রতিটি পর্যায় জ্ঞাত এবং বিবাদমুক্ত তথ্যের ভিত্তিতে হতে হয় – প্রমাণ অভিজ্ঞতার ভিত্তিতে হতে পারে না। এর অর্থ হলো গণিতে আপনি কেবল ঘটনা পর্যবেক্ষণ করে 'এটি সর্বদা সত্য' বর্ণনা করতে পারেন না। গণিতে, প্রমাণের *সমস্ত* যৌক্তিকতা স্বীকৃত বা প্রতিষ্ঠিত প্রতিবেদনের ভিত্তিতে এবং তর্কের ভিত্তিতে হওয়া উচিত।

শিখতে এবং নতুন শিক্ষণের ধারণা তৈরি করতে শিক্ষার্থীদের বিদ্যমান জ্ঞান এবং অভিজ্ঞতার ভিত্তিতে গঠন করা প্রয়োজন, এমন কিছু যা সরাসরি আনুষ্ঠানিক গাণিতিক প্রমাণের ক্ষেত্রে করা কঠিন। এই ইউনিটটির অবশিষ্ট অংশটি শিক্ষার্থীদের গাণিতিক প্রমাণের গুরুত্বপূর্ণ দিকগুলি সনাক্ত করতে এবং সেগুলোর বিকাশে সহায়তা করার উপায়ের পরামর্শ দেবে, যার মধ্যে রয়েছে:

- গাণিতিক প্রমাণগুলি অভিজ্ঞতার প্রমাণের ভিত্তিতে গঠিত হয় না, সে সম্পর্কে যুক্তি
- গাণিতিক বৈশিষ্ট্যগুলি জানা এবং স্মরণ করা
- কার্যকর যুক্তি প্রদানের কৌশলের বিকাশ ঘটানো
- ইতিমধ্যে যা জ্ঞাত তার ভিত্তিতে গঠন করা।

কখন গাণিতিক বিশ্লেষণকে 'প্রমাণ' হিসাবে বিবেচনা করা যাবে বা যাবে না, তা কখনো কখনো জানা কঠিন। এটির একটি উদাহরণ নিম্নলিখিত দৃশ্যকল্পে বর্ণনা করা হল, যেখানে শ্রীমতী রিম্পা তার শিক্ষার্থীদের জিজ্ঞাসা করেছিলেন যে, তারা কীভাবে প্রমাণ করবে যে, একটি ত্রিভুজের কোণগুলির যোগফল 180° হয়।

কেস স্টাডি 1: শ্রীমতী রিম্পা তার শ্রেণির সবাইকে প্রমাণ করতে বলেন যে ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি 180°

শিক্ষিকা: একটি ত্রিভুজের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলির যোগফল কত?

শিক্ষার্থী: 180°।

শিক্ষিকা: তুমি কি নিশ্চিত?

শিক্ষার্থী: হ্যাঁ, অবশ্যই।

শিক্ষিকা: তুমি এটি কীভাবে জানলে?

শিক্ষার্থী: কারণ … আপনি এটি আমাদের বলেছেন এবং এটি বইয়ে আছে।

শিক্ষিকা: ঠিক আছে, তোমরা মনোযোগ সহকারে চিন্তা করে বলো যে, কীভাবে গাণিতিকভাবে প্রমাণ করবে যে, ত্রিভুজের কোণগুলির যোগফল 180°। এটি একটি গাণিতিক প্রমাণ, তাই তোমাদের বিশ্লেষণ জোরালো এবং বিশ্বাসজনক হতে হবে। মনে কর তুমি একজন গণিতজ্ঞ, তুমি ভারতের প্রধানমন্ত্রীকে বিশ্বাস করানোর চেষ্টা করছো – তুমি কীভাবে এটি করবে? তুমি ত্রিভুজ এবং গাণিতিক প্রমাণ সম্পর্কে ইতিমধ্যে যা জানো
সে সম্পর্কে চিন্তা করো। প্রথমে তোমার সহপাঠীর সাথে তোমার ধারণাগুলি নিয়ে আলোচনা কর। এটি করার জন্য আমি তোমাকে পাঁচ মিনিট সময় দেব।

[পাঁচ মিনিট পরে।]

তাহলে তুমি প্রধানমন্ত্রীকে কোনও ত্রিভুজের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলির যোগফল 180°-এর সমান তা বোঝাতে কী বলবে?

শিক্ষার্থী 1: আমরা বলবো যে, যখন আপনি কোনও ত্রিভুজের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলি পরিমাপ করবেন এবং সেগুলি যোগ করবেন, তখন এটি সর্বদা 180° হবে। আপনি এটি যেকোনও সংখ্যা ব্যবহার করে এবং যেকোনও প্রকারের ত্রিভুজ ব্যবহার করে চেষ্টা করতে পারেন।

শিক্ষার্থী 2: আমরা বলবো: একটি কাগজের টুকরোতে একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করুন। এটিকে কেটে নিন। কোণগুলি ছিঁড়ে নিয়ে সেগুলি একে অপরের পাশে রাখুন। এগুলি সবসময় একটি সরল রেখার সাথে মিলে যাবে। যেমন আমরা জানি, যেকোনও সরলরেখায় কোণগুলির যোগফল 180° হয়, তাই আমরা কোনও ত্রিভুজের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলির যোগফলও 180°-এর সমান হবে এই সিদ্ধান্তে আসতে পারি। সর্বদা যে কোনও ত্রিভুজের ক্ষেত্রেও একই হবে।

শিক্ষিকা: শ্রেণির শিক্ষার্থীরা তোমরা কী মনে কর – তোমরা কি বিশ্বাস কর যে এই ধারণাগুলি গাণিতিক প্রমাণ? প্রধানমন্ত্রী কি সন্তুষ্ট হবেন? তাঁর কি বিশ্বাস করা উচিত?

চিন্তার জন্য সাময়িক বিরতি

এই ধারণাগুলি কতটুকু গাণিতিক প্রমাণ, সে বিষয়ে চিন্তা করো। প্রমাণ দেওয়ার কি অন্যান্য উপায় রয়েছে? এই প্রমাণগুলিকে কীভাবে চ্যালেঞ্জ জানানো যেতে পারে?

3 গাণিতিক বৈশিষ্ট্য এবং তথ্য জানার চেষ্টা

কীভাবে কোনও গাণিতিক প্রমাণ তৈরি করতে এগোনো যায় তার উদাহরণ নিয়ে শ্রীমতী রিম্পা শ্রেণিকক্ষে উপস্থিত হল। তবে সেগুলির একটিও গাণিতিক প্রমাণ হিসাবে বিবেচিত হল না, কারণ ব্যবহৃত যুক্তিগুলির সবকয়টি স্বীকৃতি বা প্রতিষ্ঠিত প্রতিবেদনের ভিত্তিতে নয়। যদিও দ্বিতীয় পরামর্শটি একটি রেখায় কোণগুলির সমষ্টি 180° অবধি হয় এটির কোনও ‘প্রমাণ’ নেই যে তিনটি কোণ সর্বদা একই সরল রেখায় ‘ফিট’ হবে। শিক্ষার্থীরা যুক্তি দিতে পারে যে, এটি ‘কাজ করছে’। তবে এ জাতীয় যুক্তি প্রদর্শন অভিজ্ঞতালব্ধ প্রমাণের ভিত্তিতে এবং কোনও ত্রিভুজের কোণগুলির গাণিতিক বৈশিষ্ট্যের ভিত্তিতে নয়।

উপপাদ্যগুলির প্রমাণ বিদ্যমান উপপাদ্য এবং স্বীকার্যের ভিত্তিতে হওয়া উচিত; তবে এগুলির ভিত্তিতে শুরু করতে পারার আগে আপনাকে প্রথমে এগুলির কয়েকটি জানতে হবে। আপনি একবার কিছু জানলে আপনি এগুলি থেকে অন্য অনেক সিদ্ধান্ত এবং আপনার নিজস্ব অনুসিদ্ধান্ত গঠন করতে পারবেন।

অ্যাক্টিভিটি 1 এমন কয়েকটি প্রতিষ্ঠিত এবং স্বীকৃত বক্তব্যকে তালিকাবদ্ধ করে যেগুলো স্কুলের গণিতে কার্যকর। এগুলির কয়েকটি ঐতিহ্যগত জ্যামিতি থেকে এবং উপরের প্রমাণে কার্যকরি হয়। তবে উদাহরণগুলি পরিষ্কার করে দেয় যে, উপপাদ্যগুলি শুধুমাত্র জ্যামিতি ছাড়া গণিতের আরও অনেক ক্ষেত্রে ব্যবহৃত হয়। আপনার শিক্ষার্থীদের জন্য কাজ হল আরও কয়েকটি কোন যোগ করে প্রদত্ত প্রতিবেদনগুলি অনুসরণ করে এমন কিছু প্রতিবেদন লেখা। যাতে তাদের কল্পনা এবং স্বাভাবিক সিদ্ধান্ত গ্রহণের দক্ষতা ব্যবহার করতে হয়। এ জাতীয় চিন্তায় উৎসাহ যোগাতে একটি ভাল পদবন্ধ হল: ‘যখন আমি কিছু জানি তখন নিশ্চয়ই আরও অন্য কিছুও জানি।’ এর মাধ্যমে শিক্ষার্থীরা পৃথক ধারণাগুলির মধ্যে সংযোগও স্থাপন করবে এবং তাদের অবরোহণমূলক দক্ষতার চর্চা শুরু করবে।

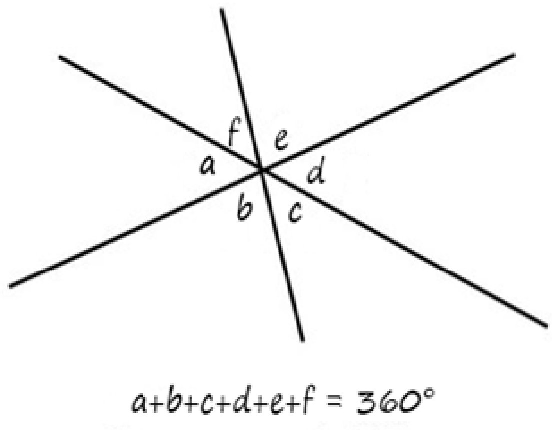
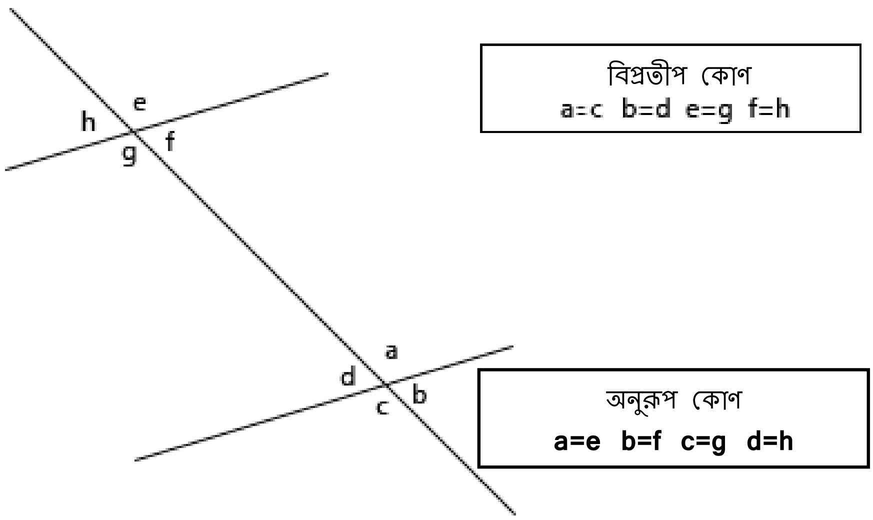
এই ইউনিটে আপনার শিক্ষার্থীদের সাথে কার্যধারাগুলি ব্যবহার করার আগে নিজেই সমস্ত কার্যধারা (বা কমপক্ষে আংশিক) ব্যবহার করে দেখা ভাল। যদি আপনি এগুলি কোনও সহকর্মীর সঙ্গে চেষ্টা করে দেখেন তবে তা আরও ভাল হবে। কারণ এটি অভিজ্ঞতার প্রতিফলনের ক্ষেত্রে সহায়ক হবে। কার্যধারাগুলি নিজেই চেষ্টা করার অর্থ হল, আপনি শিক্ষার্থীদের অভিজ্ঞতার অন্তর্দৃষ্টি পাচ্ছেন, যা আপনাকে ফল স্বরূপ আপনার শিক্ষাদান এবং শিক্ষিকা হিসাবে আপনার অভিজ্ঞতাকে প্রভাবিত করতে পারে। আপনি যখন প্রস্তুত হন তখন আপনার শিক্ষার্থীদের সাথে কার্যধারাগুলি করে দেখুন। পাঠের শেষে, কীভাবে কার্যধারাটি করা হল এবং শেখানো হল সে সম্পর্কে ভাবুন। এটি আপনাকে শিক্ষাদানের পরিবেশকে আরও শিক্ষার্থী কেন্দ্রিক করে তুলতে সহায়তা করবে।

অ্যাক্টিভিটি 1: প্রতিষ্ঠিত এবং স্বীকৃত তথ্যের একটি কার্যকর তালিকা তৈরি

আপনার শিক্ষার্থীদের বলুন যে সারণি 1-এ স্কুলের গণিতের পক্ষে উপযোগী কয়েকটি প্রতিষ্ঠিত এবং স্বীকৃত প্রতিবেদন তালিকাবদ্ধ করা আছে। যেখানে, প্রথম চারটি সারি ‘জ্যামিতির পিতা’ হিসাবে পরিচিত প্রাচীন গ্রিক গণিতজ্ঞ ইউক্লিডের *এলিমেন্টস* বইয়ের ‘প্রচলিত ধারণাগুলি’ থেকে সংগৃহীত।

সারণি 1 *স্কুলের গণিতের পক্ষে উপযোগী কয়েকটি প্রতিষ্ঠিত বা স্বীকৃত প্রতিবেদন বা তথ্য*

প্রতিষ্ঠিত বা স্বীকৃত প্রতিবেদন বা তথ্য	**একটি উদাহরণ লিখুন বা আঁকুন**	**যখন আমি এটি জানি তখন আমি এটিও জানি যে ...**
একই জিনিসের সাথে সমতুল এমন জিনিসগুলি আঁক যারা অন্যের সাথেও সমতুল (সমতুল্যতার সকর্মক বৈশিষ্ট্য)		
যদি সমান জিনিসের সাথে সমান যোগ করা হয় তবে ফলাফলগুলিও সমান হয়	7 + 3 = 4 + 6 23 – 4 = 19 – 0 সে কারণে: 7 + 3 + 23 – 4 = 4 + 6 + 19 – 0	
যদি সমতুল থেকে সমতুল বিয়োগ করা হয় তবে অবশিষ্টগুলিও সমান হয়		
সম্পূর্ণ সংখ্যাটি এর যে কোনও অংশ থেকে বৃহত্তর হয়		

প্রতিষ্ঠিত বা স্বীকৃত প্রতিবেদন বা তথ্য	**একটি উদাহরণ লিখুন বা আঁকুন**	**যখন আমি এটি জানি তখন আমি এটিও জানি যে …**
যে কোনও বিন্দুতে কোণগুলি যোগ করলে 360° হবে		কোনও সরল রেখার কোণ হল 180°
যখন কোনও রেখা এক জোড়া সমান্তরাল রেখাকে পরস্পর ছেদ করে (বা আড়াআড়ি ভাবে পেরোয়) তখন বিপ্রতীপ কোণগুলি এবং অনুরূপ কোণগুলি সমান হয়		একান্তর কোণগুলি সমান হয়
যদি দুটি রেখা একে অন্যকে ছেদ করে তবে বিপ্রতীপ কোণগুলি সমান হয়		

আপনার শিক্ষার্থীদের নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলি করুন:

- তোমরা কি এগুলির কোনও একটি চিনতে পারছ? এগুলির কী অর্থ হতে পারে তা আঁকতে পারবে?
- তুমি কি অন্য কোনও প্রতিষ্ঠিত ও স্বীকৃত প্রতিবেদন জান যা তোমার এই তালিকাটিতে যোগ করতে পার?
- প্রতিবেদনগুলি আবার দেখ এবং চিন্তা কর: 'যখন আমি এটি জানি তখন আমি এটিও জানি যে …'. এগুলি লেখ। তুমি এখন তোমার নিজের গাণিতিক প্রতিবেদন আবিষ্কার করবে।
- তোমার কাজ এবং তোমার চিন্তাভাবনা তোমার সহযোগীর সঙ্গে আলোচনা কর, এবং তুমি যে সঠিক তা তাদের বিশ্বাস করানোর চেষ্টা কর!

অ্যাক্টিভিটি 2: কোনও ত্রিভুজের কোণগুলির যোগফল 180° তা প্রমাণ করা

সমান্তরাল রেখাগুলিকে পরস্পর ছেদী রেখার কোণগুলি সম্পর্কিত তথ্য ব্যবহার করে আপনার শিক্ষার্থীদের প্রমাণ করতে বলুন যে কোনও ত্রিভুজের কোণগুলির সমষ্টি 180°-এর সমান।

(এই কার্যধারাটির জন্য কেস স্টাডি 1 পড়েছে এমন শিক্ষার্থীদের জন্য সহায়ক হতে পারে।)

এখন আপনার শিক্ষার্থীদের বলুন:

- এ জাতীয় প্রমাণগুলি একত্রিত করে এগিয়ে যাও। ‘যখন আমি এটি জানি তখন আমি এটিও জানি যে …’ পদবন্ধটি তোমার যুক্তির সহায়তার জন্য ব্যবহার কর।
- তোমার কাজ এবং চিন্তাভাবনা সহযোগীর সঙ্গে আলোচনা কর এবং তুমি যে সঠিক তা তাদের বিশ্বাস করানোর চেষ্টা কর!

কেস স্টাডি 2: শ্রীমতী ভারতী অ্যাক্টিভিটি 1 এবং 2 ব্যবহার সম্পর্কে চিন্তা ভাবনা করেছেন

*এটি হল একজন শিক্ষিকার অ্যাকাউন্ট যিনি তাঁর মাধ্যমিক শিক্ষার্থীদের সাথে অ্যাক্টিভিটি **1** এবং **2** চেষ্টা করেছেন।*

তাদের কাছে অনুশীলন করার জন্য কিছু উদাহরণ থাকার কারণে শিক্ষার্থীরা প্রতিবেদনটি কী বোঝাচ্ছে তা আঁকতে আনন্দিত হয়েছিল। বোঝার জন্য ইউক্লিডের প্রচলিত ধারণাগুলি তাদের কিছুটা শক্ত মনে হয়েছিল এবং এর ফলে তারা যে গাণিতিক ভাষা ব্যবহার করছে তা তুলনামূলক ভাবে ততটা অস্পষ্ট ছিল না।

রানু অনেকটা এ ভাবে জানতে চেয়েছিল ‘Ð A = 30° এবং Ð A= Ð B তাই Ð B = 30°’ হলে এক্ষেত্রেও কি বলা যায় ‘একই ক্ষেত্রে সমতুল বিষয়গুলি একে অন্যের সাথেও সমতুল’। আমি এটি নিশ্চিত করিনি বা অস্বীকার করিনি, কারণ আমি চেয়েছিলাম যে, ধারণাটি ভাল কিনা তা রানুই সিদ্ধান্ত নিক। কার্যটিতে কী বলা হয়েছে তা পুনরুচ্চারিত করে আমি উত্তর দিয়েছিলাম:

- ‘তুমি যখন এটি জান তখন তুমি আর কী জান?’
- ‘তুমি যে সঠিক পথে চলছ তা তোমার সহযোগীদের বিশ্বাস করাতে চেষ্টা কর।’

অ্যাক্টিভিটি 2-এ আমি প্রস্তাবিত উপায়টি ব্যবহার করেছিলাম। প্রথমে আমি শ্রীমতী রিম্পার শ্রেণিকক্ষের কেস স্টাডিটি তাদের কাছে জোরে পড়েছিলাম। তারপরে আমি শিখনের প্রতিফলন ক্ষেত্র থেকে প্রশ্ন জিজ্ঞাসা করেছিলাম: ‘শ্রেণির শিক্ষার্থীরা তোমরা কী মনে কর – তোমরা কি বিশ্বাস কর এই ধারণাগুলি গাণিতিক প্রমাণ? প্রধানমন্ত্রী কি সন্তুষ্ট হবেন? তার কি সন্তুষ্ট হওয়া উচিত ছিল?’ আমার এটি করার কারণ, আমি ভেবেছিলাম যদি আমি তাদের ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি 180° প্রমাণ করতে বলতাম তবে তারা শ্রীমতী রিম্পার শ্রেণির শিক্ষার্থীদের মতো একই প্রমাণ নিয়ে আসবে এবং এটি কোনও প্রমাণ হিসাবে বিবেচিত হবে না। বেশিরভাগ শিক্ষার্থী প্রথম দিকে শ্রীমতী রিম্পার শিক্ষার্থীদের আনা প্রমাণকে বিশ্বাসজনক প্রমাণ হিসাবে মেনে নিতে সম্মত হয়েছিল, তবে কিছু শিক্ষার্থী নিশ্চিত ছিল না। আমি তাদের কাছে জানতে চাইলাম – কেন? তারা বলল, এই প্রমাণগুলি যে প্রতিষ্ঠিত বা স্বীকৃত তথ্যে গঠিত সে বিষয়ে তারা সন্তুষ্ট নয়। এর ফলে অভিজ্ঞতালব্ধ প্রমাণ সম্পর্কে একটি আলোচনা হয়, এটি কী ছিল? কেন তা গাণিতিক প্রমাণ হিসাবে অনুমোদিত নয়?

কেবল তারপরেই আমি অ্যাক্টিভিটি 2 উপস্থাপন করি এবং শিক্ষার্থীদের এটি করে দেখতে, চেষ্টা ও পরীক্ষা-নিরীক্ষা করতে বলি। মনে হচ্ছিল তারা কিছুটা শিথিলভাবে এবং আনন্দের সঙ্গে এটি করছিল। তাদের চিন্তাভাবনা আলোচনা করছিল এবং তাদের পাশের

শিক্ষার্থীদের সঙ্গে তাদের যুক্তিগুলি বোঝানোর চেষ্টা করছিল। পরে আমরা সমগ্র শ্রেণির শিক্ষার্থীদেরসঙ্গে তাদের ধারণাগুলি আলোচনা করেছিলাম। কিছু প্রমাণ শ্রেণির বাকি শিক্ষার্থীদের বিশ্বাস করাতে পারেনি, তবে অনেক শিক্ষার্থী তাদের প্রমাণের জন্য জোরালো যুক্তি খাড়া করেছিল।

খান অ্যাকাডেমির তৈরি ভিডিওর মতো প্রমাণ দেখায় এমন কিছু ভিডিও আমি অনলাইনে খুঁজে পেয়েছি [নীচে 'অতিরিক্ত সম্পদসমূহ', দেখুন। যদিও আমি এটি শ্রেণিকক্ষে দেখাতে পারিনি, তবে আমি শিক্ষার্থীদের তা জানিয়ে দিয়েছিলাম যে এটি রয়েছে।

আপনার শিক্ষাদান অনুশীলনের প্রতিফলন

আপনি যখন আপনার শ্রেণির সঙ্গে এ জাতীয় কোনও অনুশীলন করবেন, তখন কোনটি ভাল হয়েছে বা কোনটি তত ভাল হয়নি তা বিবেচনা করে দেখুন। শিক্ষার্থীদের উৎসাহী ও কাজ করতে সক্ষম করে এবং আপনার ব্যাখ্যা করা প্রয়োজন এমন প্রশ্নগুলি বিবেচনা করুন। এ জাতীয় প্রতিফলন সর্বদা এমন একটি 'স্ক্রিপ্ট' খুঁজতে সহায়তা করে যা শিক্ষার্থীদের নিকট গণিতকে আকর্ষণীয় এবং উপভোগ্য করে তুলতে সাহায্য করে। যদি তারা বুঝতে না পারে ও কিছু করতে না পারে, তবে তারা অংশগ্রহণ করতে কম আগ্রহ দেখাবে। আপনি প্রতিবার কার্যধারাগুলি করার সময় এই প্রতিফলনকারী অনুশীলনটি ব্যবহার করুন। লক্ষ্য করবেন, শ্রীমতী ভারতী যেমন করেছিলেন। কিছু ছোটখাটো বিষয় পরিবর্তন গড়ে দেবে।

চিন্তার জন্য সাময়িক বিরতি

চিন্তাভাবনায় উৎসাহ যোগাতে ভাল প্রশ্ন:

- আপনার শ্রেণির জন্য এটি কেমন ছিল?
- শিক্ষার্থীদের কাছ থেকে কোন উত্তরগুলি অপ্রত্যাশিত ছিল? কেন?
- আপনার শিক্ষার্থীরা কতটা বুঝেছে জানার জন্য আপনি কী প্রশ্ন জিজ্ঞাসা করেছিলেন?
- আপনি কি কখনও হস্তক্ষেপ করার প্রয়োজনীয়তা অনুভব করেছিলেন?
- কোন বিষয়গুলি আপনাকে আরও জোর দিয়ে শেখাতে হবে বলে মনে হয়েছিল?
- আপনি কি কাজটির কোন রকম পরিবর্তন করেছিলেন? যদি তাই হয় তবে সেটার জন্য আপনার যুক্তি কী ছিল?

4 শিক্ষার্থীদের গাণিতিক বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে চিন্তাভাবনা করতে সহায়তা করতে কাজের নকশা

অ্যাক্টিভিটি 2-এ শিক্ষার্থীরা তাদের স্বাভাবিক বিশ্লেষণী ক্ষমতা গাণিতিক বৈশিষ্ট্যের জ্ঞান ব্যবহার করে তাদের নিজস্ব গাণিতিক 'সত্যগুলি' গঠন করেছে। গাণিতিক বৈশিষ্ট্যগুলি সম্পর্কে জানা অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ, কারণ গাণিতিক প্রমাণে যে কোনও যুক্তি এই বৈশিষ্ট্যগুলির ভিত্তিতে হওয়া উচিত। একইভাবে, কখন কোন প্রতিবেদন প্রযোজ্য হয় সে সম্পর্কে গাণিতিক শর্তাদি সংজ্ঞায়িত করা সমান গুরুত্বপূর্ণ।

গাণিতিক অন্য বৈশিষ্ট্য ও শর্তাদি সংজ্ঞায়িত করা সম্পর্কে সচেতন করার জন্য কয়েকটি প্রতিবেদন এমনভাবে বাছাই করা হয়। যাতে কোন বৈশিষ্ট্য অন্য কোন সেটের সাথে সংশ্লিষ্ট থাকে। বাছাই ও শ্রেণিবদ্ধ করা, পার্থক্য ও মিলগুলির বিষয়ে আপনাকে ভাবতে বাধ্য করে। পরের কার্যধারাটিতে এই উপায়টি ব্যবহার করতে সাহায্য করে।

অ্যাক্টিভিটি 3: বৈশিষ্ট্য এবং শর্তগুলি খুঁজতে বাছাই এবং শ্রেণিবদ্ধকরণ

আপনার শিক্ষার্থীদের বলুন যে ‘অনুপাত’ হল এক বা একাধিক আনুপাতিক রূপ যেগুলো (পরস্পরের সঙ্গে) সমান। আনুপাতিক হওয়া এমন একটি বৈশিষ্ট্য যা গণিতের বিভিন্ন বিষয় এবং ধারণায় প্রায়ই থাকে।

অনুসরণ করা প্রতিবেদনগুলি গাণিতিক ধারণাগুলিকে ব্যাখ্যা করে এমন কয়েকটি পরিস্থিতিকে বর্ণনা করে। আপনার শিক্ষার্থীদের এগুলি পড়তে এবং সেগুলি আনুপাতিক হবে কিনা এবং কোন শর্তে তা শ্রেণিবদ্ধ করতে বলুন। তাদেরকে এর কারণ দর্শানো উচিত এবং কোন উদাহরণটি আনুপাতিক হবে (বা আনুপাতিক হবে না) তা কোনও বন্ধুকে ব্যাখ্যা করা উচিত। সমালোচক হন।

a. একটি চিত্র বড় করা।
b. একটি স্যান্ডউইচ তৈরি করতে পাঁউরুটির টুকরোগুলি কাটা।
c. একটি একচল বিশিষ্ট সরলরৈখিক সমীকরণের চল $(ax + b = 0)$।
d. একটি প্রদত্ত সময়ে কয়েকজন ব্যক্তি দ্বারা কৃত কাজ।
e. একটি নির্দিষ্ট সিনেমা হলে একটি নির্দিষ্ট সিনেমা দেখতে বেশ কয়েকজন ব্যক্তি দ্বারা ব্যয়িত অর্থের পরিমাণ।
f. ট্রেন ভ্রমণের জন্য টিকিটের ভাড়া।
g. কোনো রেখাকে m সংখ্যক সমান অংশে বিভাজন।
h. কুতুব মিনারের উচ্চতা (চিত্র 1)।

চিত্র 1 কুতুব মিনারে, দিল্লী

i. কোনও বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।
j. কোনও বর্গাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।
k. কোনও বৃত্তাকার চোঙয়ের উচ্চতা এবং এর ব্যাসার্ধের গুণফল।
l. একটি শঙ্কুর ঘনফল।
m. একটি রিকশার ভাড়া।

কেস স্টাডি 3: শ্রীমতী ভারতী অ্যাক্টিভিটি 3-এর ব্যবহার সম্পর্কে চিন্তা ভাবনা করেছেন

শিক্ষার্থীদের এই কার্যধারায় নিযুক্ত করতে সহায়তার জন্য আমরা শ্রেণিকক্ষে একত্রে জোরে জোরে নির্দেশিকা এবং উদাহরণ (ক) এবং (খ)টি পড়েছি। তারপর আমরা (ক) এর সম্ভাব্য উত্তরগুলির জন্য চিন্তা করেছি এবং বর্ধিত চিত্রটিকে পুরানোটির সাথে আনুপাতিক রাখতে প্রয়োজনীয় শর্তাদি নিয়ে আলোচনা করেছি। এটি রাহুল শুরু করেছিল, সে বলেছিল যে চিত্রটি দ্বিগুণের মতো বড় করতে আপনাকে এটির প্রস্থ দ্বিগুণ করতে হবে। আমি দেখতে পাচ্ছিলাম যে ঊষা চিন্তা করছে, তার ভ্রু কুঁচকে যাচ্ছে, এবং তারপরে সে বলল যে, এটি কাজ করবে না, কারণ এটি ছবিটিকে অদ্ভুত করে তুলবে।

আমি তারপরে শিক্ষার্থীদের প্রথমে স্বতন্ত্র ভাবে কাজ করতে বলেছিলাম, যেন প্রথমে তারা তাদের নিজস্ব চিন্তা এবং ধারণাগুলির বিকাশ করতে পারে এবং তারপরে তাদের চিন্তাভাবনা এবং ধারণা সহযোগীদের সঙ্গে আলোচনা করতে পারে।

কিছু সময় পর আমি সমগ্র শ্রেণির সঙ্গে আলোচনা করার জন্য এবং শিক্ষার্থীদের জন্য তাদের ধারণা ভাগ করে নিতে কিছু প্রতিবেদন বেছে নিয়েছিলাম। আমি খেয়াল করেছিলাম যে শিক্ষার্থীরা কিছু পদবন্ধের পুনরাবৃত্তি করছে, যেমন:

- ‘কিন্তু কী হবে যদি …?’
- ‘যদি আপনি এটির পরিবর্তন করেন তবে সেই পরিবর্তনগুলিও একই থেকে যাবে।’
- ‘এটি একই, এটি পৃথক।’

আমি শিক্ষার্থীদের এটি দেখিয়েছিলাম এবং তারা একমত হয়েছিল যে, গাণিতিক বৈশিষ্ট্য এবং শর্তাদি খুঁজে বের করতে এই পদবন্ধগুলি ভাল ছিল। একটি বড় কাগজে দুজন শিক্ষার্থী ‘গাণিতিক বৈশিষ্ট্য এবং শর্তাদি খোঁজার জন্য ভাল পদবন্ধ’ নামক একটি শিরোনাম লিখেছিল, তারপর এটি একটি দেওয়ালে আটকানো হয়েছিল।

চিন্তার জন্য সাময়িক বিরতি

- আপনার শিক্ষার্থীরা কতটা বুঝেছে তা মূল্যায়ন করার জন্য আপনি কী প্রশ্ন জিজ্ঞাসা করেছিলেন?
- আপনি কি কখনও হস্তক্ষেপ করার প্রয়োজনীয়তা অনুভব করেছিলেন? কোন বিষয়গুলি আপনাকে আরও জোর দিয়ে শেখাতে হবে বলে মনে হয়েছিল?
- আপনার সমস্ত শিক্ষার্থী কি কার্যধারায় অংশ নিয়েছিলেন? যদি কোনও শিক্ষার্থী অংশ না নিয়ে থাকে, তবে আপনি কি কারণটি জানতে পেরেছিলেন?

5 বিশ্বাস করাতে শিক্ষাদান

গাণিতিক প্রমাণে ব্যবহৃত যুক্তি প্রদর্শন এবং সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়ার নিয়মনিষ্ঠ বিধিগুলি স্কুল স্তরে শেখানোর পক্ষে সহজ নয়। ব্যবহৃত ধারণাগুলি প্রায়শই শিক্ষার্থীদের অভিজ্ঞতার জগৎ থেকে অনেক দূরের বলে মনে হয়। কোন ক্ষেত্রে এটি কিছুটা আশ্চর্যজনক, কারণ, আমাদের বোধগম্যতা এবং সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়ার পাশাপাশি বিশ্বাস করানোর বিভিন্ন স্তর সম্পর্কে জ্ঞান,দক্ষতা এবং শক্তিথাকা দরকার।

পরের দুটি কার্যধারার লক্ষ্য হল শিক্ষার্থীরা প্রতিদিনের বোধগম্যতা থেকে যে দক্ষতা এবং অভিজ্ঞতাগুলি পায় তা তাদের বোধগম্যতাকে আরও বেশি সুগঠিত এবং নিয়ম নিষ্ঠ করতে ব্যবহার করা। এই ভাবে এটি শিক্ষার্থীরা ইতোমধ্যেই যা জানে এবং করে তার উপরে গঠিত

হয়। কোনো প্রতিবেদন আদৌ কার্যকর কিনা এবং কখন কার্যকর তা খুঁজে বের করার জন্য ‘সর্বদা সত্য, কখনও কখনও সত্য বা কখনই সত্য নয়’ - এই কাজের নকশাটি ব্যবহার করে।

তারপর এই কার্যধারার ফলাফল পরেরটিতে ব্যবহার করা হয়। সেখানে শিক্ষার্থীরা তাদের বোধগম্যতা এবং যৌক্তিকতায় কঠোরতার বিভিন্ন স্তরগুলিতে কাজ করে। এখানে কাজের নকশাটি ‘নিজেকে বিশ্বাস করানো, কোনও বন্ধুকে বিশ্বাস করানো, রামানুজনকে বিশ্বাস করানো’র উপায় ব্যবহার করে।

শিক্ষার্থীদের আরও নির্ভুল হতে সাহায্য করতে যাদের বিশ্বাস করানো প্রয়োজন তাদের আলাদা করা। নিজেকে বিশ্বাস করানো প্রায়শই সহজ হয়: আপনি অভিজ্ঞতালব্দ্ধ প্রমাণের ভিত্তি সম্পর্কে খুশি হতে পারেন এবং ব্যবহৃত ভাষাটি ভাবপ্রবণ এবং অস্পষ্ট হতে পারে। কারণ এটি জোরে ব্যাখ্যা করার কোনও প্রয়োজন নেই। কোনও বন্ধুকে বিশ্বাস করানোর জন্য ভাষার ব্যবহার আরও যথাযথ হওয়া প্রয়োজন। চিন্তাভাবনাগুলি সংগঠিত এবং যোগাযোগের জন্য আক্ষরিক হওয়া এবং ব্যবহৃত যুক্তিগুলির বৈধতা থাকা উচিত। তবে আপনি যা বলছেন তা স্বীকার করতে আপনার বন্ধু আগ্রহী হতে পারে, কারণ তারা আপনার বন্ধু, যদিও আপনি নিজেকে যে পরিমাণ চ্যালেঞ্জ করতে পারেন তারা তার চেয়ে বেশি চ্যালেঞ্জ জানাতে পারে। ভারতীয় গণিতজ্ঞ রামানুজনকে বিশ্বাস করাতে শিক্ষার্থীদের জোরালো গাণিতিক যুক্তি প্রদর্শনের প্রয়োজন, কারণ তিনি তাদের বোধগম্যতার খুঁত ধরার চেষ্টা করবেন। রামানুজনকে বিশ্বাস করানো যুক্তি স্বীকৃত বা প্রতিষ্ঠিত গাণিতিক প্রতিবেদনগুলির ভিত্তিতে হতে হবে, কারণ কেবল সেগুলিই অ-বিবাদযোগ্য।

অ্যাক্টিভিটি 4: সর্বদা সত্য, কখনও কখনও সত্য বা কখনই সত্য নয়

প্রস্তুতি

নীচের প্রতিবেদনগুলির জন্য শিক্ষার্থীদের এই বিষয়গুলি সম্পর্কে কিছু জ্ঞানের প্রয়োজন। আপনার শ্রেণিকক্ষের সঙ্গে সম্পর্কিত এমন একটি বেছে নিন।

কার্যধারা

আপনার শিক্ষার্থীদের নিচের বিষয়গুলো বলুন:

- নিম্নলিখিত প্রতিবেদনগুলি পড়। এগুলির মধ্যে কোনটি সর্বদা সত্য, কখনও কখনও সত্য বা কখনও সত্য নয়? তোমার সহযোগীর সঙ্গে তোমার বোধগম্যতা নিয়ে আলোচনা কর।
    a. p একটি মৌলিক সংখ্যা হলে p + 1 একটি যৌগিক সংখ্যা হবে।
    b. কোনও বৃত্তের n-সংখ্যক জ্যা বৃত্তাকার অংশটিকে n + 1 অঞ্চলে বিভাজিত করে যারা একে অপরের উপরে পতিত নয়।
    c. যদি দুটি গোলকের ঘনফল সমান হয় তবে গোলকগুলি সর্বসম হয়।
    d. কোনও ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র ত্রিভুজের ভিতরে নিহিত।
    e. মৌলিক সংখ্যা অসীম হয়।
- তুমি নিজের থেকে আরও কিছু প্রতিবেদন তৈরি কর এবং সেগুলি তোমার সহযোগীকে দাও। এগুলির মধ্যে কোনটি সর্বদা সত্য, কখনও কখনও সত্য বা কখনও সত্য নয়?

অ্যাক্টিভিটি 5: নিজেকে বিশ্বাস করান, কোনও বন্ধুকে বিশ্বাস করান, রামানুজনকে বিশ্বাস করান

আপনার শিক্ষার্থীদের বলুন:

- মনে রাখবে রামানুজন তোমার বোধগম্যতার খুঁতগুলি খুঁজে বার করার চেষ্টা করবেন।
- অ্যাক্টিভিটি 4 পুনরায় কর, তবে কেবল তোমার সহযোগীর সঙ্গে তোমার বোধগম্যতা নিয়ে আলোচনা করার পরিবর্তে তোমাকে এখন এমন যৌক্তিকতা উপস্থিত করতে হবে যা:
  - নিজেকে বিশ্বাস করায়
  - কোনও বন্ধুকে বিশ্বাস করায়
  - রামানুজনকে বিশ্বাস করায়।
- শ্রেণির সঙ্গে তোমার সর্বাধিক বিশ্বাসযোগ্য যৌক্তিকতা ভাগ করে নাও। অন্যান্য শিক্ষার্থীরা কি তোমার যুক্তি বিশ্বাস করেছিল?

কেস স্টাডি 4: শ্রীমতী সৃজিতা অ্যাক্টিভিটি 4 এবং 5 ব্যবহার সম্পর্কে চিন্তা-ভাবনা করেছেন

আমি অ্যাক্টিভিটি 4 করতে সিদ্ধান্ত নিয়েছি – কোনও প্রতিবেদন সর্বদা সত্য, কখনও কখনও সত্য বা কখনই সত্য নয় কিনা সে সম্পর্কে – শিক্ষার্থীদের তিন ও চার জনের দলে রেখে আলোচনা করেছিলাম। কারণ আমি ভেবেছিলাম যে এটি তাদের আরও ধারণা তৈরি করার সুযোগ দেবে। আমি খেয়াল করেছি যে, এই ক্ষেত্রে তিনজনের দল ভাল কাজ করে বলে মনে হয় – এগুলি একে অন্যের সঙ্গে আরও বেশি সংশ্লিষ্ট ছিল – অন্যদিকে যখন চারজনের দলে কাজ করা হয় তখন শিক্ষার্থীরা যোগ দিচ্ছে না, কেবল শুনছে। অ্যাক্টিভিটি 5-এর জন্য আমি তাদের জোড় বেঁধে কাজ করতে বলেছি, এতে প্রত্যেকে একবার করে সুযোগ পাবে এবং তাদের যৌক্তিকতার অনুশীলন করতে সময় পাবে। এই কাজগুলি করার একটি ভাল বিষয় হল, এটি শিক্ষার্থীদের একটি মতামত দিতে এবং সেগুলি যুক্তিসহ প্রস্তুত করতে জোর দেয়। যদি তারা কেবল আগে থেকেই শুনে থাকে।

যখন আমি শিক্ষার্থীদের জিজ্ঞাসা করি যে, তাদের নিজেদের কোনও বন্ধুকে বা রামানুজনকে বিশ্বাস করাতে যৌক্তিকতায় পার্থক্য রয়েছে কিনা? তারা উত্তরে জানায় যে, কয়েকটি ক্ষেত্রে তাদের আরও নির্ভুল এবং বিশদ করে তুলেছে। তবে অন্য ক্ষেত্রে কিছু শিক্ষার্থীরা অনুভব করে যে তারা তাদের যৌক্তিকতায় কারণগুলি দর্শাতে পারবে না। তারা কিছু ভাবতে পারেনি – তারা কেবল প্রতিবেদনটি সঠিক ছিল বলে জানত, কারণ তারা এটি আমার কাছ থেকে শিখেছিল। যৌক্তিক তর্ক প্রদর্শন বিকাশে তাদের সহায়তা করতে পারে এমন পদক্ষেপগুলি সম্পর্কে ভাবতে সহায়তা করতে আমি ভেবেছি যে শ্রেণিকক্ষের কারও কিছু পরামর্শ থাকবে এবং সেগুলি যখন আমার পরিবর্তে অন্য শিক্ষার্থীর পক্ষ থেকে আসে তখন সেগুলি আরও জটিল হবে। এর কোন্ প্রতিবেদনগুলি ঘটেছে তা নির্দিষ্ট করতে আমি দলগুলোকে বলেছি এবং অন্যান্য শিক্ষার্থীদের কাছে জিজ্ঞাসা করেছি যে কিছু যৌক্তিকতা রয়েছে কিনা। যুক্তিটি সমগ্র শ্রেণিতে ব্যাখ্যা করা হয়েছিল এবং প্রকৃত গণিতজ্ঞের মতোই এই যুক্তিগুলির সমালোচক হতে আমি সমস্ত শিক্ষার্থীকে বলেছি। এরপর, যে শিক্ষার্থীরা আটকে গিয়েছিল আমি তাদের কাছে ফিরে গিয়েছিলাম এবং তারা বলেছে যে আলোচনাটি তাদের সমস্যা সমাধানে সহায়তা করেছিল।

ভিডিও: চিন্তাশক্তি উন্নত করতে প্রশ্নের ব্যবহার

ভিডিও: শেখার জন্য কথা বলুন

প্রশ্নের ব্যবহার ও আপনার শ্রেণিতে শেখার স্বার্থে কথা বলা সম্পর্কে আরও ধারণার জন্য সম্পদ 2 এবং 3 দেখুন।

চিন্তার জন্য সাময়িক বিরতি

- আপনার শ্রেণির জন্য এটি কেমন ছিল?
- আপনার শিক্ষার্থীরা কতটা বুঝেছে জানার জন্য আপনি কী প্রশ্ন জিজ্ঞাসা করেছিলেন?
- আপনি কি কাজটির কোন রকম পরিবর্তন করেছিলেন? যদি তাই হয় তবে সেটার জন্য আপনার যুক্তি কী ছিল?

6 সারসংক্ষেপ

গণিত শিক্ষাকে, বিশেষত প্রমাণ সম্পর্কিত ক্ষেত্রে, শিক্ষার্থীরা প্রায়শই সম্পূর্ণরূপে তথ্য ও পদ্ধতি শেখা ও মুখস্থ করার উপায় হিসাবেই দেখে। শিক্ষার্থীদের সাথে গাণিতিক বোধগম্যতার বিকাশ কেবল তাদের নিজেদের জন্য গাণিতিক 'সত্যগুলি' গঠনের অনুমতি দেয় তা নয়,

বরং এটি তাদের গণিত অনুধাবনেও সহায়তা করে। গাণিতিক বোধগম্যতা তাদের যুক্তি তৈরি করতে গাণিতিক বৈশিষ্ট্য অনুসন্ধান ও ব্যবহার প্রয়োজন হয়। এভাবে গাণিতিক বোধগম্যতা গঠন প্রায়শই বিষয়টির সৌন্দর্য হিসেবে বিবেচিত হয় এবং তা অবশ্যই বিষয়টির মূল ধারণাগুলির একটি। আপনার শিক্ষার্থীদের সাথে প্রমাণ নিয়ে কাজ করে আপনি তাদেরকে আমন্ত্রণ করছেন গণিতজ্ঞের মতো আচরণ করতে এবং গণিতের প্রতি আগ্রহকে কিছুটা উৎসাহ দিচ্ছেন।

চিন্তার জন্য সাময়িক বিরতি

এই ইউনিটে ব্যবহার করা হয়েছে এমন তিনটি ধারণা চিহ্নিত করুন, যেগুলো আপনি অন্যান্য বিষয় শিক্ষাদানের সময় ব্যবহার করতে পারবেন। আপনাকে শীঘ্রই পড়াতে হবে এমন দুটি বিষয় সম্পর্কে নোট নিয়ে রাখুন, যেখানে সম্ভবত ছোটখাটো কিছু সমন্বয় করার পর সেই ধারণাগুলি ব্যবহার করা হতে পারে।

সম্পদসমূহ

সম্পদ 1: NCF/NCFTE শিক্ষাদানের আবশ্যকতাগুলি

এই ইউনিটটি NCF (2005) ও NCFTE (2009)-এর নিম্নলিখিত শিক্ষাদানের প্রয়োজনীয়তাগুলির সঙ্গে যোগসূত্র স্থাপন করে এবং আপনাকে সেই প্রয়োজনীয়তাগুলি পূরণে সহায়তা করবে:

- শিক্ষার্থীদের তাদের জ্ঞান গঠনের ক্ষমতাকে উৎসাহ দিতে; শিক্ষাগ্রহণ যেন মুখস্থর পদ্ধতিগুলি থেকে সরে আসে তা নিশ্চিত করতে তাদের নিজস্ব শিক্ষণে সক্রিয় সহযোগী হিসাবে দেখুন শুধুমাত্র জ্ঞানের প্রাপক হিসাবে নয়।
- শিক্ষাগ্রহণকে ব্যক্তিগত অভিজ্ঞতার অর্থ অনুসন্ধান হিসাবে এবং জ্ঞান আহরণকে প্রতিফলনমূলক শিক্ষাগ্রহণের অবিরাম চলমান প্রক্রিয়া হিসাবে দেখুন।
- আলোচনার বিষয় হিসাবে, যোগাযোগের মাধ্যম হিসেবে, নিজেদের মধ্যে আলোচনার বিষয়বস্তু হিসেবে এবং একসাথে কাজ করার মাধ্যম হিসেবে গণিতকে দেখার জন্য শিক্ষার্থীদের সহায়তা করুন।

সম্পদ 2: চিন্তাশক্তি উন্নত করতে প্রশ্নের ব্যবহার

শিক্ষকরা সবসময়ই তাঁদের শিক্ষার্থীদেরকে প্রশ্ন করেন; প্রশ্ন করা মানে হল শিক্ষকরা তাঁদের শিক্ষার্থীদেরকে শিখতে এবং আরো বেশি শিখতে সাহায্য করতে পারেন। গড়পড়তাভাবে, একজন শিক্ষক একটি পড়ানোর এক-তৃতীয়াংশ সময় তাঁদের শিক্ষার্থীদের প্রশ্ন করাতে ব্যয় করেন (হেস্টিংস, 2003)। করা প্রশ্নগুলির, 60 শতাংশ স্মরণ করানো তথ্য এবং 20 শতাংশ হল পদ্ধতিগত (হেটি, 2012), বেশির ভাগ উত্তরই ঠিক বা ভুল সংক্রান্ত। কিন্তু শুধুমাত্র ভুল বা ঠিক হতে পারে এমন প্রশ্ন জিজ্ঞাসা করা কি শেখায় উন্নতি ঘটাতে পারে?

শিক্ষার্থীদেরকে জিজ্ঞেস করার মতো বহু ধরনের প্রশ্ন রয়েছে। শিক্ষক যে উত্তর এবং ফলাফল চান তা প্রশ্নের প্রকৃতি নির্দেশ করে যা শিক্ষকের সদ্ব্যবহার করা উচিত। শিক্ষকরা সাধারণত এই উদ্দেশ্যে শিক্ষার্থীদেরকে প্রশ্ন জিজ্ঞাসা করেন:

- নতুন বিষয় বা উপকরণের সাথে পরিচয় করাতে শিক্ষার্থীদের বোধকে সেই দিকে পরিচালিত করতে
- শিক্ষার্থীদেরকে তাদের চিন্তা বৃহত্তরভাবে ভাগ করে নেওয়ার জন্য চেষ্টা করাতে
- ভুল সংশোধন করতে
- শিক্ষার্থীদেরকে মানসিকভাবে বিস্তৃত করতে
- বোধগম্যতা পরীক্ষা করতে।

শিক্ষার্থীরা কি জানে তা খুঁজে দেখতে সাধারণত প্রশ্নের ব্যবহার হয়, কাজেই তাদের অগ্রগতির মূল্যায়ন করতে এটি গুরুত্বপূর্ণ। শিক্ষার্থীদেরকে অনুপ্রাণিত করতে, তাদের চিন্তার দক্ষতা বিস্তৃত করতে এবং উৎসুক মানসিকার বিকাশ ঘটাতেও প্রশ্নগুলি ব্যবহার করা যেতে পারে। এদের দুটি বড় শ্রেণিতে বিভক্ত করা যেতে পারে:

- **নিম্নতর-ক্রমের প্রশ্নাবলী**, যার মধ্যে তথ্যের স্মরণ করানো এবং আগে শেখানো জ্ঞান জড়িত থাকে, প্রায়শই আবদ্ধ প্রশ্ন থাকে যার উত্তর হ্যাঁ বা না দিয়ে হয়।
- **উচ্চতর-ক্রমের প্রশ্নাবলী**, যাতে আরো বেশি ভাবনাচিন্তার দরকার হয়। যুক্তিসম্মত উপায়ে কোন মতের সমর্থন করতে বা শিক্ষার্থীদেরকে আগে শেখা তথ্য একত্রিত করে উত্তর গঠন করতে বলতে পারেন। উচ্চতর-ক্রমের প্রশ্নগুলি প্রায়শই উন্মুক্ত হয়ে থাকে।

উন্মুক্ত (Open ended) প্রশ্নগুলি শিক্ষার্থীদেরকে পাঠ্যবই-নির্ভর উত্তরের বাইরে গিয়ে ভাবতে উৎসাহিত করে, এবং এভাবেই উত্তরের ব্যাপ্তি বের করে আনে। উন্মুক্ত প্রশ্নগুলি শিক্ষার্থীদের বিষয়বস্তুর বোধগমত্যা মূল্যায়ন করতেও শিক্ষকদেরকে সাহায্য করে।

শিক্ষার্থীদেরকে উত্তর দিতে উৎসাহিত করা

বহু শিক্ষকই কোন প্রশ্নের উত্তর প্রয়োজন হওয়ার আগে এক সেকেন্ডেরও কম সময় দেন এবং এই কারণে তাঁরা নিজেরাই প্রশ্নটির উত্তর দিয়ে দেন বা প্রশ্নটি পুনর্গঠন করেন (হেস্টিংস, 2003)। শিক্ষার্থীদের কাছে কেবলমাত্র প্রতিক্রিয়া দেওয়ার সময় থাকে- তাদের কাছে ভাববার সময় থাকে না! যদি আপনি উত্তরে জন্য কয়েক সেকেন্ড অপেক্ষা করেন তাহলে শিক্ষার্থীরা চিন্তা করার সময় পাবে। এটি শিক্ষার্থীদের কৃতিত্বের উপর একটি ইতিবাচক প্রভাব ফেলে। একটি প্রশ্ন করার পরে অপেক্ষা করার দ্বারা, নিচের বিষয়গুলো বৃদ্ধি পায়:

- শিক্ষার্থীদের উত্তরের দৈর্ঘ্য
- উত্তরদাতা শিক্ষার্থীদের সংখ্যা
- শিক্ষার্থীদের প্রশ্নের হার
- কম সমর্থ শিক্ষার্থীদের কাছ থেকে উত্তরের সংখ্যা

- শিক্ষার্থীদের মধ্যে ইতিবাচক পারস্পরিক আদানপ্রদান

আপনার উত্তর গুরুত্বপূর্ণ

যত ইতিবাচকভাবে আপনি প্রদত্ত সকল উত্তরগুলি গ্রহণ করবেন, তত বেশি শিক্ষার্থীরা চিন্তা করা এবং চেষ্টা করা বজায় রাখবে। ভুল উত্তর ও ধারণাগুলির সংশোধন নিশ্চিত করার বহু উপায় আছে। একজন শিক্ষার্থীর ভুল ধারণা অন্য অনেকের মধ্যেই আছে সে সম্পর্কে আপনি নিশ্চিত হতে পারেন। আপনি নিম্নলিখিত বিষয়গুলো চেষ্টা করে দেখতে পারেন:

- উত্তরের সেই অংশগুলি বেছে নিন যেগুলি সঠিক এবং সহায়তাপূর্বক উপায়ে উত্তরগুলি নিয়ে শিক্ষার্থীদেরকে আরেকটু ভাবতে বলুন। এটি আরো সক্রিয় অংশগ্রহণে উত্সাহিত করবে এবং আপনার শিক্ষার্থীদেরকে তাদের ভুল থেকে শিখতে সাহায্য করবে। কীভাবে আপনি সহায়তাপূর্বক উপায়ে কোন ভুল উত্তরে সাড়া দিতে পারেন তা নিম্নলিখিত মন্তব্যগুলির মাধ্যমে দেখানো হলো: 'বাষ্পীভবন যে মেঘ তৈরি করে সে ব্যাপারে তুমি ঠিকই ছিলে, কিন্তু আমার মনে হয় তুমি বৃষ্টি সম্পর্কে যা বলেছো সেটা আমাদের আরেকটু বেশি ভেবে দেখা উচিত। অন্য কেউ কি কোন ধারণা দিতে পারো?'
- শিক্ষার্থীদের দেওয়া সব উত্তরগুলি ব্ল্যাকবোর্ডে লিখুন এবং তারপর শিক্ষার্থীদেরকে সেগুলির সবকটি নিয়ে ভাবতে বলুন। কোন উত্তরগুলি ঠিক বলে তাদের মনে হয়? কোন ধারণা থেকে অন্য উত্তরগুলি দেওয়া হয়েছিল বলে মনে করা যেতে পারে? এটি শিক্ষার্থীরা যে ভাবনা চিন্তা করছে তা বোঝার জন্য আপনাকে একটি সুযোগ প্রদান করে এবং শিক্ষার্থীদেরকে তাদের মধ্যে থাকতে পারে এমন যে কোন ভুল ধারণা ভীতিহীনভাবে সংশোধনের উপায় প্রদান করে।

সতর্কভাবে শোনা এবং শিক্ষার্থীদেরকে আরও ব্যাখ্যা করতে বলার দ্বারা সব উত্তরগুলিকে মর্যাদা দিন। যদি আপনি ঠিক ভুল নির্বিশেষে সব উত্তরগুলির জন্য আবার ব্যাখ্যা চান, তাহলে শিক্ষার্থীরা প্রায়শই কোন ভুল নিজেরাই ঠিক করে নেবে, আপনি একটি চিন্তাশীল শ্রেণিকক্ষ তৈরি করবেন এবং আপনার শিক্ষার্থীরা কি শিখেছে এবং কীভাবে এগোতে হবে তা আপনি সত্যিই জানবেন। যদি ভুল উত্তর অপমান বা শাস্তিতে পর্যবসিত হয় তাহলে আপনার শিক্ষার্থীরা আবার বিব্রত হওয়া বা উপহাসের ভয়ে চেষ্টা করা বন্ধ করে দেবে।

উত্তরগুলির গুণগত মান উন্নত করা

এটি গুরুত্বপূর্ণ যে আপনি সঠিক উত্তরে শেষ হয় না এমন একটি প্রশ্নের ক্রম অবলম্বনের চেষ্টা করবেন। অনুসরণকারী প্রশ্ন দিয়ে সঠিক উত্তরগুলি পুরস্কৃত হওয়া উচিত, যেগুলি জ্ঞানের বিস্তার ঘটায় এবং শিক্ষার্থীদেরকে শিক্ষকদের সাথে জড়িত হওয়ার সুযোগ প্রদান করে। আপনি এগুলি জিজ্ঞাসা করার দ্বারা এটি করতে পারেন:

- কীভাবে বা কেন
- উত্তর দেওয়ার অন্য উপায়
- আরো ভালো একটি শব্দ
- এটি উত্তর তা প্রতিপন্ন করার প্রমাণ
- একটি প্রাসঙ্গিক দক্ষতার সংযোজন ঘটানো
- একটি নতুন গঠন বিন্যাসে একই দক্ষতা বা যুক্তির প্রয়োগ করা।

আপনার ভূমিকার আরেকটি গুরুত্বপূর্ণ অংশ শিক্ষার্থীদেরকে তাদের উত্তর সম্পর্কে আরো গভীরভাবে চিন্তা করতে সাহায্য করা (এবং এভাবেই তাদের উত্তরের মান উন্নত করা)। নিম্নলিখিত দক্ষতাগুলি শিক্ষার্থীদেরকে আরো বেশি কৃতিত্ব অর্জন করতে সাহায্য করবে:

- **প্ররোচিত** করার জন্য যথাযথ ইঙ্গিত দেওয়া দরকার- যেগুলি শিক্ষার্থীদেরকে তাদের উত্তর উন্নত করতে এবং আরো ভালো করতে সাহায্য করে। প্রথমে আপনি হয়তো বলবার জন্য উত্তরটিতে কি কি সঠিক তা বেছে নিতে পারেন এবং তারপর তথ্য, আরো প্রশ্ন বা অন্যান্য ইঙ্গিত প্রদান করতে পারেন। ('যদি তোমরা তোমাদের কাগজের উড়োজাহাজের শেষে একটি ভার যোগ করো তাহলে কি ঘটতে পারে?')
- **অনুসন্ধান করা** হল আরো বেশি খুঁজে বার করার চেষ্টা, একটি অগোছালো উত্তর বা আংশিক সঠিক উত্তর উন্নত করতে তারা কি বলতে চাইছে তা ব্যাখ্যা করে দেওয়ার দ্বারা শিক্ষার্থীদেরকে সাহায্য করা। ('তাহলে এটা কীভাবে একসঙ্গে খাপ খায় সে সম্পর্কে তুমি আমাকে আর কি বলতে পারো?')

- **পুনরায় দৃষ্টিনিবদ্ধকরণ** হল শিক্ষার্থীদের জ্ঞানের সাথে তাদের আগে শেখা জ্ঞানের সংযোগ সাধন করতে সঠিক উত্তর তৈরি করা। এটি তাদের বোঝাপড়া বৃদ্ধি করে। ('তুমি যা বলেছ তা সঠিক, কিন্তু গত সপ্তাহে আমাদের স্থানীয় পরিবেশের বিষয়ে আমরা যা দেখেছি তার সাথে এটি কীভাবে সম্পর্কযুক্ত?')
- **ক্রমানুসারে** প্রশ্নগুলিকে সাজানো মানে হল চিন্তার সম্প্রসারণ ঘটাতে এক পরিকল্পিত ক্রমে প্রশ্নগুলি জিজ্ঞাসা করা। প্রশ্নগুলির মাধ্যমে শিক্ষার্থীদেরকে সারসংগ্রহ করা, তুলনা করা, ব্যাখ্যা বা বিশ্লেষণ করার দিকে চালিত করা উচিত। এমন প্রশ্ন প্রস্তুত করুন যা শিক্ষার্থীদের মানসিক বিস্তার ঘটাবে, কিন্তু তাদেরকে এতটাও সমস্যাবহুল অবস্থায় ফেলবে না যাতে তারা প্রশ্নের মানেই হারিয়ে ফেলে। ('কীভাবে তুমি তোমার আগের সমস্যা অতিক্রম করেছো তা ব্যাখ্যা করো। সেটা কী পার্থক্য তৈরি করেছিল? এর পরে আপনার কি মোকাবিলা করা প্রয়োজন বলে আপনার মনে হয়?')
- **মন দিয়ে শোনা** আপনাকে শুধু আপনার প্রত্যাশিত উত্তর খুঁজতেই সমর্থ করে না, বরং আপনাকে লক্ষ্যণীয় বা উদ্ভাবনমূলক উত্তরের প্রতিও সজাগ করে তোলে যা হয়তো আপনি প্রত্যাশাই করেননি। এছাড়াও এটি দেখায় যে আপনি শিক্ষার্থীদের চিন্তাভাবনার মর্যাদা দিচ্ছেন এবং সে কারণেই তাদের চিন্তাশীল উত্তর দেওয়া আরো বেশি সম্ভবপর হয়। এরকম উত্তরগুলি ভুল ধারণাকে দৃষ্টিগোচর করতে পারে, যা হয়তো সংশোধন করা প্রয়োজন, বা তারা হয়তো একটি নতুন আঙ্গিক দেখাতে পারে, যা আপনি বিবেচনা করে দেখেননি। ('আমি সেটা ভেবেই দেখিনি। তুমি এরকম কেন ভাবলে সেটা নিয়ে আমাকে আরো একটু বলো।')

একজন শিক্ষক হিসাবে, যদি আপনি আপনার শিক্ষার্থীদের কাছ থেকে আকর্ষণীয় এবং উদ্ভাবনী উত্তর পেতে চান, তাহলে আপনার এমন প্রশ্ন জিজ্ঞাসা করা প্রয়োজন যা উদ্বুদ্ধকারী এবং সমস্যাবহুল। তাদেরকে ভাবতে সময় দেওয়া উচিত এবং আপনি দেখে অবাক হবেন, আপনার শিক্ষার্থীরা কতটা জানে এবং কতটা ভালোভাবে আপনি তাদেরকে তাদের শেখায় অগ্রগতি ঘটাতে সাহায্য করতে পারছেন।

মনে রাখবেন, প্রশ্ন করার মানে হলো শিক্ষক কি জানেন তা দেখা নয়, বরং শিক্ষার্থীরা কি জানে তা দেখা। এটা মনে রাখা গুরুত্বপূর্ণ যে আপনার কখনোই নিজের করা প্রশ্নগুলির উত্তর দেওয়া উচিত নয়! যাই হোক না কেন, যদি শিক্ষার্থীরা জেনে যায় যে আপনি তাদেরকে কয়েক সেকেন্ড নীরবতার পরে উত্তর দিয়ে দেবেন, তাহলে উত্তরগুলিতে তাদের উৎসাহ আর কোথায় রইল?

সম্পদ 3: শেখার জন্য কথা বলা

শেখার জন্য কথা বলা গুরুত্বপূর্ণ কেন

কথা বলা মানুষের বিকাশের একটা অংশ, যা আমাদেরকে চিন্তা করতে, শিখতে এবং সারা বিশ্ব সম্বন্ধে ধারণা পেতে সাহায্য করে। মানুষেরা যুক্তি, জ্ঞান ও বোধের বিকাশের উপকরণ হিসেবে ভাষাকে ব্যবহার করে। অতএব, শিক্ষার্থীদেরকে তাদের শেখার অভিজ্ঞতার অংশ হিসেবে কথা বলতে উৎসাহ দেওয়ার অর্থ হল তাদের শিক্ষাগত অগ্রগতির বৃদ্ধি ঘটানো। যে ধারণাগুলো শেখা হচ্ছে সেগুলো সম্বন্ধে আলোচনা করার অর্থ হল:

- সেই ধারণাগুলো খতিয়ে দেখা হচ্ছে
- যুক্তির উন্নতি এবং সংগঠিত করা হচ্ছে
- প্রকৃত অর্থে, শিক্ষার্থীরা আরো বেশি শিখছে

শ্রেণিকক্ষে শিক্ষার্থীদের কথা ব্যবহারের বিভিন্ন উপায় আছে। বারবার পড়ে মুখস্থ করা থেকে উচ্চতর পর্যায়ের আলোচনা পর্যন্ত।

পরম্পরাগতভাবে, শিক্ষকের কথাই প্রাধান্য পেয়েছিল, আর শিক্ষার্থীদের কথা বা জ্ঞানের থেকে তাকে বেশি গুরুত্ব দেওয়া হয়। তবে শেখার জন্য কথাকে ব্যবহার করার সঙ্গে পাঠগুলোর পরিকল্পনাও জড়িত আছ। এতে শিক্ষার্থীরা আরো বেশি কথা বলতে পারে আর এমন একটি উপায়ে আরো বেশি শিখতে পারে যা তাদের পূর্বের অভিজ্ঞতার সঙ্গে সংযোগ স্থাপন করে। এটা শিক্ষক ও তাঁর শিক্ষার্থীদের মধ্যে একটা প্রশ্নোত্তর পর্বের থেকে অনেক বেশি কিছু। এতে শিক্ষার্থীদের নিজের ভাষা, ধারণা, যুক্তি ও আগ্রহগুলোকে আরো বেশি সময় দেওয়া হয়। আমাদের মধ্যে বেশির ভাগই কোনো কঠিন সমস্যা

সম্বন্ধে অথবা কোনো কিছু জানার জন্য অন্যজনের সঙ্গে কথা বলতে চান, এবং শিক্ষকরা সুপরিকল্পিত অ্যাক্টিভিটিগুলোর সাহায্যে এই সহজাত প্রবৃত্তিকে আরো বৃদ্ধি করতে পারেন।

শ্রেণিকক্ষে শিখনমূলক অ্যাক্টিভিটিগুলোর জন্য কথা বলার পরিকল্পনা করা

কথা বলার অ্যাক্টিভিটিগুলো পরিকল্পনা করা শুধুমাত্র সাক্ষরতা ও শব্দভান্ডার শেখার পাঠের জন্য নয়; এটা গণিত ও বিজ্ঞান এবং অন্যান্য বিষয়গুলি পরিকল্পনা করারও অংশ। এটা সমগ্র অক্ষরজ্ঞান শ্রেণি, জুটিবদ্ধ ও দলবদ্ধ কাজ, ঘরের বাইরের অ্যাক্টিভিটি, চরিত্রাভিনয়-ভিত্তিক অ্যাক্টিভিটি, লেখা, পড়া, বাস্তবসম্মত অনুসন্ধান ও সৃজনশীল কাজের ক্ষেত্রেও পরিকল্পনা করা যায়।

এমন কি সীমিত অক্ষরজ্ঞান ও সংখ্যাগত দক্ষতা আছে এমন অল্পবয়সী শিক্ষার্থীরাও উচ্চতর পর্যায়ের চিন্তাভাবনার দক্ষতা প্রদর্শন করতে পারে, যদি কাজটা তাদের পূর্বের অভিজ্ঞতার ভিত্তিতে গড়ে তোলার জন্য পরিকল্পনা করা হয় এবং তা উপভোগ্য হয়। উদাহরণস্বরূপ, শিক্ষার্থীরা একটি গল্প, পশু বা ফটোর কোনো আকার, আঁকা ছবি থেকে বাস্তব জিনিসগুলো সম্বন্ধে পূর্বাভাস দিতে পারে। শিক্ষার্থীরা একটি চরিত্র অভিনয়ের মাধ্যমে কোনো পুতুল বা চরিত্রের কাছে সমস্যাগুলো সম্পর্কে তাদের পরামর্শ এবং সম্ভাব্য সমাধানগুলো জানাতে পারে।

আপনি শিক্ষার্থীদের কী শেখাতে ও চিন্তাভাবনা করাতে চান, এবং আপনি শিক্ষার্থীদের দিয়ে কোন ধরনের আলোচনা প্রস্তুত করাতে চান, তাকে কেন্দ্র করে পাঠটির পরিকল্পনা করুন। কিছু ধরনের আলোচনা অনুসন্ধানমূলক হয়, যেমন: ‘এরপরে কী ঘটতে পারে?’, ‘আমরা কি আগে এটা দেখেছি?’, ‘এটা কী হতে পারে?’ বা ‘এর কারণ কী বলে মনে হয়?’ অন্যান্য ধরনের আলোচনা আরো বেশি বিশ্লেষণমূলক হয়, যেমন ধারণা, প্রমাণ বা প্রস্তাবগুলোর গুরুত্ব যথার্থতা মেপে দেখা।

এটাকে আকর্ষণীয়, উপভোগ্য করে তুলতে চেষ্টা করুন এবং সমস্ত শিক্ষার্থীদের মধ্যে আলোচনায় অংশ নেওয়াকে সম্ভব করে তুলুন। শিক্ষার্থীরা স্বচ্ছন্দে ও নিরাপদে উপহাসের ভয় ছাড়া কিংবা তারা ভুল করছে এটা অনুভব করানো ছাড়াই মত প্রকাশ করতে পারে এবং ধারণাগুলো খতিয়ে দেখতে পারে সে রকম পরিবেশ থাকা প্রয়োজন।

শিক্ষার্থীদের আলোচনার ভিত্তিতে প্রসার ঘটানো

শেখার জন্য কথা বলা শিক্ষকদের এগুলি করার সুযোগ দেয়:

- শিক্ষার্থীদের বক্তব্য শোনা
- শিক্ষার্থীদের ধারণাগুলোর প্রশংসা করা এবং প্রসার ঘটানো
- এটাকে আরো প্রসারিত করার জন্য শিক্ষার্থীদেরকে উৎসাহ দেওয়া।

সমস্ত উত্তরগুলোকে লিখিত বা প্রথাগতভাবে মূল্যায়ন করতে হবে না, কারণ আলোচনার মাধ্যমে ধারণাগুলোর বিকাশ করা হল শেখার একটা গুরুত্বপূর্ণ অংশ। তাদের অভিজ্ঞতা ও ধারণাগুলোকে ব্যবহার করে তাদের শেখাকে প্রাসঙ্গিক অনুভব করাতে হবে। সেরা শিক্ষার্থীদের আলোচনা অনুসন্ধানমূলক হয়, অর্থাৎ শিক্ষার্থীরা একে অন্যের ধারণাগুলোকে খতিয়ে দেখে ও চ্যালেঞ্জ জানায়, যাতে তারা তাদের উত্তরগুলো সম্বন্ধে আত্মবিশ্বাসী হয়ে উঠতে পারে। একসাথে আলোচনারত দলগুলোকে উৎসাহ দিতে হবে যাতে তারা সহজে কোনো উত্তর স্বীকার না করে, সে যেই দিয়ে থাকুক না কেন। আপনি সমগ্র শ্রেণির ব্যবস্থাতে ‘কেন?’, ‘তুমি কীভাবে সেই সিদ্ধান্ত নিয়েছিলে?’ বা ‘তুমি কী এই সমাধানে কোনো সমস্যা দেখতে পাও?’ এই ধরনের অনুসন্ধানমূলক প্রশ্ন ব্যবহারের মাধ্যমে চিন্তাভাবনাকে চ্যালেঞ্জ জানানোর মডেল প্রস্তুত করতে পারেন। আপনি

শ্রেণিকক্ষের চারদিকে ঘোরাফেরা করে শিক্ষার্থীদের দলগুলোর কথা শুনতে পারেন এবং এই ধরনের প্রশ্ন জিজ্ঞাসা করে তাদের চিন্তাভাবনাকে প্রসারিত করতে পারেন।

শিক্ষার্থীদের আলোচনা, ধারণা ও অভিজ্ঞতাগুলোকে গুরুত্ব দেওয়া ও প্রশংসা করা হলে তারা উৎসাহিত হবে। শিক্ষার্থীদের কথা বলা, মন দিয়ে শোনা, একে অন্যকে প্রশ্ন করা এবং বাধা না দিতে শেখার সময় এরকম আচরণের জন্য তাদের প্রশংসা করুন। শ্রেণির পিছিয়ে থাকা শিক্ষার্থীদের সম্বন্ধে সচেতন থাকুন এবং আপনি কীভাবে তাদেরকে অন্তর্ভুক্ত করা সুনিশ্চিত করতে পারেন সেই বিষয়ে ভাবুন। সমস্ত শিক্ষার্থীকে পূর্ণরূপে অংশগ্রহণের সুযোগ করে দেয় এমনভাবে কাজ করার উপায়গুলি প্রতিষ্ঠা করার জন্য কিছু সময় লাগতে পারে।

শিক্ষার্থীদের নিজে থেকে প্রশ্ন জিজ্ঞাসা করতে উৎসাহ দান

আপনার শ্রেণিকক্ষে প্রচুর সমস্যাবহুল প্রশ্ন জিজ্ঞাসা করা এবং শিক্ষার্থীদের ধারণাগুলোকে মান্যতা দেওয়া ও প্রশংসা করা হয় এমন পরিবেশ তৈরি করুন। শিক্ষার্থীরা যদি ভয় পায় যে তাদের প্রশ্নগুলোকে কীভাবে গ্রহণ করা হবে, কিংবা তারা যদি ভাবে যে, তাদের ধারণাগুলোকে গুরুত্ব দেওয়া হবে না, তাহলে তারা প্রশ্ন করবে না। শিক্ষার্থীদের প্রশ্ন জিজ্ঞাসা করতে আমন্ত্রণ জানালে তাদেরকে কৌতূহল হতে উৎসাহ দেয়, তাদেরকে শেখানোর ব্যাপারে ভিন্ন কোনো উপায়ে ভাবতে এবং তাদের দৃষ্টিভঙ্গী বুঝতে আপনাকে সাহায্য করে।

আপনি কিছু নিয়মিত দলগত বা জুটিবদ্ধ কাজ, হয়ত বা 'শিক্ষার্থীদের প্রশ্নকাল' পরিকল্পনা করতে পারেন, যাতে শিক্ষার্থীরা প্রশ্ন উত্থাপন করতে বা ব্যাখ্যা চাইতে পারে।

আপনি এগুলি করতে পারেন:

- আপনার পাঠের একটি বিভাগকে 'তোমার কোনো প্রশ্ন থাকলে হাত ওঠাও' নামকরণ করতে পারেন
- একজন শিক্ষার্থীকে হট-সিটে বসান, আর অন্যান্য শিক্ষার্থীদেরকে উৎসাহ দিন সেই শিক্ষার্থীকে এমনভাবে প্রশ্ন জিজ্ঞাসা করতে যেন সে উদাহরণস্বরূপ পীথাগোরাস বা মীরাবাঈয়ের চরিত্রে অভিনয় করছে
- জুটিবদ্ধভাবে বা ছোট ছোট দলে 'আমাকে আরো বলো' খেলাটা খেলুন
- সাধারণ অনুসন্ধান অভ্যাস করার জন্য শিক্ষার্থীদের কে/কী/কোথায়/কখন/কেন প্রশ্নগুলো সহ একটি প্রশ্ন তালিকা দিন
- শিক্ষার্থীদের কিছু তথ্য দিন (যেমন ওয়ার্ল্ড ডেটা ব্যাংক থেকে লভ্য তথ্য, যেমন বিভিন্ন দেশে পূর্ণ সময়ের শিক্ষায় থাকা শিশুদের শতকরা হার বা কেবলমাত্র স্তন্যপান করানোর হার) এবং আপনি এই তথ্য সম্বন্ধে কী কী প্রশ্ন করতে পারেন সেই বিষয়ে তাদেরকে ভাবতে বলুন
- শিক্ষার্থীদের সপ্তাহের সেরা প্রশ্নের তালিকা সহ প্রশ্নের দেওয়ালের একটি নকশা প্রস্তুত করুন

শিক্ষার্থীরা যখন তাদের কাছ থেকে আসা প্রশ্নগুলো জিজ্ঞসা করা ও তার উত্তর দেওয়ার জন্য স্বাধীন হয়, তখন আপনি তাদের আগ্রহ ও চিন্তাভাবনার স্তর দেখে প্রশংসাপূর্ণভাবে বিস্মিত হতে পারেন। শিক্ষার্থীরা যখন কীভাবে আরো স্পষ্ট ও নির্ভুলভাবে মতবিনিময় করা যায় তা শেখে তাতে তারা শুধু যে তাদের মৌখিক ও লিখিত শব্দভান্ডার বৃদ্ধি হয় শুধু তাই নয় এর ফলে তাদের নতুন জ্ঞান ও দক্ষতাও বিকশিত হয়।

অতিরিক্ত সম্পদসমূহ

- 'Proof – sum of measures of angles in a triangle are 180' by Khan Academy: https://www.khanacademy.org/math/geometry/angles/v/proof---sum-of-measures-of-angles-in-a-triangle-are-180

- A newly developed maths portal by the Karnataka government: http://karnatakaeducation.org.in/KOER/en/index.php/Portal:Mathematics
- Class X maths study material: http://www.zietmysore.org/stud_mats/X/maths.pdf
- National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics: https://www.ncetm.org.uk/
- National STEM Centre: http://www.nationalstemcentre.org.uk/
- OpenLearn: http://www.open.edu/openlearn/
- BBC Bitesize: http://www.bbc.co.uk/bitesize/
- Khan Academy's math section: https://www.khanacademy.org/math
- NRICH: http://nrich.maths.org/frontpage
- Mathcelebration: http://www.mathcelebration.com/
- Art of Problem Solving's resources page: http://www.artofproblemsolving.com/Resources/index.php
- Teachnology: http://www.teach-nology.com/worksheets/math/
- Maths is Fun: http://www.mathsisfun.com/
- National Council of Educational Research and Training's textbooks for teaching mathematics and for teacher training of mathematics: http://www.ncert.nic.in/ncerts/textbook/textbook.htm
- LMT-01 *Learning Mathematics*, Block 1 ('Approaches to Learning') Block 2 ('Encouraging Learning in the Classroom'), Block 6 ('Thinking Mathematically'): http://www.ignou4ublog.com/2013/06/ignou-lmt-01-study-materialbooks.html
- *Learning Curve* and *At Right Angles*, periodicals about mathematics and its teaching: http://azimpremjifoundation.org/Foundation_Publications
- Central Board of Secondary Education's books and support material (also including the *Teachers Manual for Formative Assessment – Mathematics (Class IX)*) – select 'CBSE publications', then 'Books and support material': http://cbse.nic.in/welcome.htm

তথ্যসূত্র/গ্রন্থতালিকা

De Geest, E. (2007) *Many Right Answers: Learning in Mathematics Through Speaking and Listening*. London: The Basic Skills Agency. Available from: http://shop.niace.org.uk/media/catalog/product/m/a/manyrightanswers.pdf (accessed 4 September 2014).

Hanna, G. (2000) 'Proof, explanation and exploration: an overview', *Educational Studies In Mathematics*, vol. 44, no. 1–3, pp. 5–23.

Hastings, S. (2003) 'Questioning', *TES Newspaper*, 4 July. Available from: http://www.tes.co.uk/article.aspx?storycode=381755 (accessed 22 September 2014).

Hattie, J. (2012) *Visible Learning for Teachers: Maximising the Impact on Learning*. Abingdon: Routledge.

Lakatos, I. (1976) 'Proofs and refutations' in Worral, J. and Zahar, E. (eds) *The Logic of Mathematics Discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lee, C. (2006). *Language for Learning: Assessment for Learning in Practice*. Maidenhead: Open University Press.

Mason, J., Burton, L. and Stacey, K. (2010) *Thinking Mathematically*, 2nd edn. Harlow: Pearson Education.

Murray, M. (2004) *Teaching Mathematics Vocabulary in Context*. Portsmouth, NH: Heinemann.

National Council of Educational Research and Training (2005) *National Curriculum Framework* (NCF). New Delhi: NCERT.

National Council of Educational Research and Training (2009) *National Curriculum Framework for Teacher Education* (NCFTE). New Delhi: NCERT.

National Council of Educational Research and Training (2012a) *Mathematics Textbook for Class IX***.** New Delhi: NCERT.

National Council of Educational Research and Training (2012b) *Mathematics Textbook for Class X*. New Delhi: NCERT.

Watson, A., Jones, K. and Pratt, D. (2013) *Key Ideas in Teaching Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Zack, V. and Graves, B. (2001) 'Making mathematical meaning through dialogue: "Once you think of it, the Z minus three seems pretty weird"', *Educational Studies in Mathematics*, vol. 46, pp. 229–71.

Mathematic Textbooks of class IX and X of West Bengal Board of Secondary Education

কৃতজ্ঞতাস্বীকার

তৃতীয় পক্ষের উপাদানগুলি ব্যতীত এবং অন্যথায় নীচে বর্ণিত না থাকলে এই সামগ্রীটি একটি ক্রিয়েটিভ কমনস অ্যাট্রিবিউশন শেয়ারঅ্যালাইক লাইসেন্সের অধীনে উপলব্ধ হয় (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/)। নীচে স্বীকৃত উপাদানটি মালিকানাধীন এবং এই প্রকল্পের লাইসেন্সের অধীনে ব্যবহার করা হয় এবং ক্রিয়েটিভ কমনস লাইসেন্সের বিষয়বস্তু নয়। এর অর্থ এই উপাদানটি কেবল মাত্র TESS-ইন্ডিয়া প্রকল্পে অ্যাডাপ্ট না করেই ব্যবহার করতে পারা যায়, কোনও পরবর্তী OER সংস্করণগুলিতে পারা যায় না। এর মধ্যে TESS-ইন্ডিয়া, OU এবং UKAID লোগোগুলির ব্যবহার অন্তর্ভুক্ত।

এই ইউনিটে উপাদানটি পুনরুৎপাদনে অনুমোদন প্রাদনের জন্য নিম্নলিখিত উৎসগুলির প্রতি কৃতজ্ঞতা স্বীকার করা হয়:

চিত্র 1: দ্য ওপেন ইউনিভার্সিটির জন্য ক্লেয়ার লি [Figure 1: Clare Lee for The Open University] ।

কপিরাইট স্বত্বাধিকারীদের সাথে যোগাযোগ করার উদ্দেশ্যে সর্বতভাবে প্রচেষ্টা করা হয়েছে। যদি কোনোটি অনিচ্ছাকৃতভাবে নজর এড়িয়ে গিয়ে থাকে, তাহলে প্রকাশকরা প্রথম সুযোগেই সানন্দে প্রয়োজনীয় বন্দোবস্ত করবেন।

ভিডিও (ভিডিও স্টিল সহ): ভারত ব্যাপী শিক্ষকদের শিক্ষাদানকারী, প্রধান শিক্ষক, শিক্ষক ও ছাত্রছাত্রীদের ধন্যবাদ জানানো হচ্ছে, যারা প্রস্তুতির সময়ে ওপেন ইউনিভার্সিটির সঙ্গে কাজ করেছিলেন।